Aufgabe 22: Spin-1/2-System in einem Magnetfeld

(4 Punkte)

Wir betrachten ein System von N vielen, an Gitterplätzen lokalisierten, Spin-1/2-Teilchen, welches sich in einem homogenen Magnetfeld $\mathbf{B}$ befindet. Dabei besitzt jeder Spin ein magnetisches Moment μ_B. Für die Energie des Systems gilt dann

$$E = -\left(N_\uparrow - N_\downarrow\right) \mu_B B = -M \mu_B B.$$

$N_\uparrow$ ($N_\downarrow$) bezeichnet die Zahl der Spins parallel (antiparallel) zu $\mathbf{B}$. Berechen Sie mit der mikrokanonischen Gesamtheit als Funktion von N und M (je 1 Punkt)

1. die Entropie S des Systems,
2. die Temperatur T,
3. die innere Energie U,
4. die Wärmekapazität C_V.

Aufgabe 23: Dichteoperator

(4 Punkte)

Nehmen Sie die Dichteoperatoren ρ_λ als bekannt an. Finden Sie nun einen Dichteoperator für das Ensemble, dessen Mitglieder mit der Wahrscheinlichkeit p_λ durch ρ_λ beschrieben werden. Dabei soll $p_\lambda \geq 0$ und $\sum_\lambda p_\lambda = 1$ gelten. Zeigen Sie, dass

$$\rho = \sum_\lambda p_\lambda \rho_\lambda$$

der gesuchte Dichteoperator ist. Beweisen Sie hierfür die folgenden Eigenschaften (je 1 Punkt):

1. $< A >= \mathrm{Sp}\,(A\rho)$
2. $\rho^\dagger = \rho$
3. $\mathrm{Sp}\rho = 1$
4. $\mathrm{Sp}\rho^2 \leq 1$.

Aufgabe 24: Entropie eines quantenmechanischen Systems

(2 Punkte)

Betrachten Sie die Entropie $S = -k_B \mathrm{Sp}\,(\rho \ln \rho)$ eines quantenmechanischen Systems und zeigen Sie, dass diese unter einer unitären Zeitentwicklung zeitlich konstant bleibt.
Hinweis: $\ln x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} (x-1)^k / k, 0 < x \leq 2$.

Erklärung: Die Entropie $S = -k_B \mathrm{Sp}\,(\rho \ln \rho)$ wird von Neumann Entropie genannt und stellt eine Erweiterung des klassischen Entropiekonzepts für die Quantenmechanik dar, welche durch die Dichtematrix ρ beschrieben wird. Ist ρ als Summe seiner Eigenvektoren $|j>$, mit $\sum_j \eta_j |j><j|$, gegeben, lässt sich die Entropie auch schreiben als $S = -k_B \sum_j \eta_j \ln \eta_j$.
Siehe auch: Von Neumann, John (1955). *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik.* Berlin: Springer. ISBN 3-540-59207-5.

Aufgabe 25: Eigenschaften eines Spuroperators

(4 Punkte)

Folgende Eigenschaften des Spuroperators sollen bewiesen werden (je 1 Punkt):

1. SpA ist invariant unter einer Basistransformation.
2. Die Spurbildung ist eine lineare Abbildung.
3. Die Spurbildung ist zyklisch invariant, d.h. $\mathrm{Sp}(AB) = \mathrm{Sp}(BA)$, wenn beide Spuren existieren.
4. Ist $\rho(t)$ sei ein zeitabhängiger Dichteoperator, dann ist $\mathrm{Sp}(\rho^2(t))$ zeitunabhängig, d.h. einer reiner Zustand bleibt rein, ein gemischter Zustand bleibt gemischt.