Aufgabe 30: Weißer Zwerg

(14 Punkte)

Weiße Zwerge stellen eine besondere Klasse an Sternen dar, in denen größenordnungsmäßig eine Sonnenmasse in ein Hunderttausendstel des Sonnenvolumens komprimiert ist. Ein Weißer Zwerg besteht hauptsächlich aus Helium, welches aufgrund der exterm hohen Temperatur als vollständig ionisiert und somit als Gas aus Heliumkernen und Elektronen angenommen werden kann, dh. wir betrachten hier ein ideales Fermi-Gas mit der Fermi-Energie

$$\epsilon_F \approx \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{3\pi^2}{v}\right)^{2/3},$$

mit $v = V/N$ als Volumen pro Teilchen, und der Fermi-Temperatur

$$T_F \approx 10^{11} K.$$

Da die Fermi-Temperatur um ein Vielfaches größer ist als die tatsächliche Temperatur des Sterns, stellt das Elektronengas ein hochgradig entartetes Fermi-Gas dar, welches sich kaum anders verhält als ein Elektronengas nahe dem absoluten Nullpunkt, dh. wir betrachten letztendlich ein Elektronengas als ideales Fermi-Gas im Grundzustand. Innerhalb dieses Elektronengases besteht ein enormer Druck, welcher durch die gravitative Anziehungskraft der Heliumkerne ausgeglichen wird und somit den Stern 'zusammenhält'. Weitere Effekte werden vernachlässigt. (Ausführlichere Informationen finden Sie zB. in 'Astronomie und Astrophysik' von Weigert, Wendker und Wisotzki.)
Also betrachten wir einen Weißen Zwerg als ein System aus N Elektronen im Grundzustand und $N/2$ Heliumkernen. Dabei sind die Elektronen realtivistisch zu betrachten, dh. die Energie eines einzelnen Elektrons zum Impuls $\mathbf{p}$ lautet

$$\epsilon_{\mathbf{p}} = \sqrt{(pc)^2 + (m_e c^2)^2},$$

wobei m_e die Masse eines Elektrons ist.

1. Berechnen Sie die Grundzustandsenergie des Fermi-Gases $E_0 = 2\sum_{|\mathbf{p}|<p_F}\sqrt{(pc)^2 + (m_e c^2)^2}$. Nehmen Sie dabei den Impuls p, mit $0 < p < p_F$, $p_F = \hbar(3\pi^2/v)^{(1/3)}$ ist der Fermi-Impuls, als kontinuirlich an. (1 Punkte)
   Hinweis:
   $$f(y) = \int_0^y dx\; x^2\sqrt{x^2+1} = \begin{cases} \frac{1}{3}y^3(1 + \frac{3}{10}y^2 + \cdots), & y \ll 1 \\ \frac{1}{4}y^4(1 + \frac{1}{y^2} + \cdots), & y \gg 1 \end{cases}$$
   Wie lautet y? (1 Punkt)

2. Geben Sie die Masse M des Weißen Zwerges in Abhängigkeit der Protonenmasse m_P und der Elektronenmasse m_e ($m_P \gg m_e$), sowie den Radius R (das Volumen V sei bekannt) an. (1 Punkt)

3. Berechnen Sie nun den Druck P_0 des Fermi-Gases
   $$P_0 = -\frac{\partial E_0}{\partial V}$$
   und geben Sie $P_0 = P_0(y)$ sowohl im nicht-relativistischen Grenzfall $y \ll 1$, als auch im extrem relativistischen Grenzfall $y \gg 1$, an. (2 Punkte)

4. Führen Sie die dimensionlose Größen $\bar{M}$ und $\bar{R}$, mit
   $$\bar{M} = \frac{9\pi}{8}\frac{M}{m_P} \quad \text{und} \quad \bar{R} = \frac{R}{\hbar/(m_e c)},$$
   ein und geben Sie P_0 für beide Grenzfälle in Abhängigkeit von $\bar{M}$ und $\bar{R}$ an. (2 Punkte)
   Hinweis: Führen Sie eine für beide Grenzfälle gültige Konstante $\bar{C}$ ein.

5. Machen Sie sich klar, dass für die Stabilität folgende Bedingung (s. Erklärung oben),

$$\int_{\infty}^{R} P_0 4\pi r^2 dr = -\frac{\gamma M^2}{R}$$

erfüllt sein muss. γ ist hier die Gravitationskonstante. Welche Gleichgewichtsbedingung folgt daraus für P_0? Geben Sie diese in Abhängigkeit von $\bar{M}$ und $\bar{R}$ an. (2 Punkte)

6. Vergleichen Sie diese Gleichgewichstbedingung mit ihren Ergebnissen für P_0 sowohl im nicht-relativistischen als auch im extrem-relativistischen Grenzfall. (2 Punkte)

7. Welche Bedingungen ergeben sich aus diesen Grenzfällen für das Verhältnis zwischen $\bar{R}$ und $\bar{M}$? Was bedeutet dies für sehr große Massen M (bzw. $\bar{M}$) eines Weißen Zwerges? (3 Punkte)

Aufgabe 31: Erzeugungs-/Vernichtungsoperatoren

(4 Punkte)

Der Operator $\hat{a}$ erfülle zusammen mit seinem hermitesch adjungierten Operator $\hat{a}^\dagger$ die Bose-Vertauschungsrelationen

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1. \tag{1}$$

Weiterhin definieren wir den Anzahloperator über die Relation $\hat{n} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$.

Zeige (je 1 Punkt):

1. Für einen (normierten!) Eigenvektor $|n\rangle$ von $\hat{n}$ mit Eigenwert n ($\hat{n}|n\rangle = n|n\rangle$) gilt $n \geq 0$.
2. $\hat{n}\hat{a}|n\rangle = (n-1)\hat{a}|n\rangle$.
3. $\hat{n}\hat{a}^\dagger|n\rangle = (n+1)\hat{a}^\dagger|n\rangle$.
4. $|n\rangle = c_n \left(\hat{a}^\dagger\right)^n |0\rangle$. Gib explizit den Koeffizienten c_n an.