Aufgabe 32: Strahlung schwarzer Körper

(16 Punkte)

Elektromagnetische Strahlung im Gleichgewicht kann in einem Hohlraumresonator (Volumen $V = L^3$), in dem aufgrund der Randbedingungen nur bestimmte Wellenlängen möglich sind, realisiert werden.

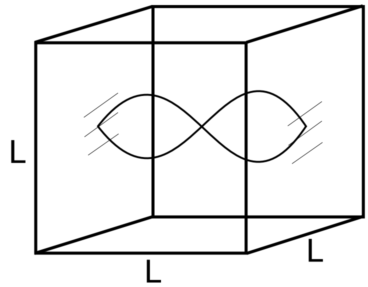

Abbildung 1: Hohlraumresonator mit Volumen V und einer elektromagnetischer Welle.

Dabei stellen wir uns einen Kasten mit perfekt leitenden Wänden und Vakuum im Innern vor. Die elektromagnetische Wellen können beispielsweise für das elektrische Feld aus der Wellengleichung

$$\left(\triangle - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\mathbf{E} = 0 \tag{1}$$

und anschließend für das magnetische Feld aus der Maxwellgleichung

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \tag{2}$$

bestimmt werden.

1. Zeigen Sie, dass
$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 \sin(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} + \phi)\sin(\omega t + \Psi) \tag{3}$$
eine Lösung für das elektrische Feld ist. Geben anschließend die Dispersionsrelation an und bestimmen Sie eine Gleichung für das magnetische Feld $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$. (2 Punkte)

2. Da es im Innern des Resonators keine Quellen gibt, gilt $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$. Geben Sie die Bedeutung dieser Tatsache für die Schwingung im Vergleich zur Ausbreitungsrichtung an. Die Komponenten der Welle sollen aufgrund der Randbedingungen an den Flächen des Resonators verschwinden. Leiten Sie daraus eine Quantisierungsbedingung für die Wellen ab. (2 Punkte)

3. Bei der Quantisierung der elektromagnetischen Wellen stellt man fest, dass der Spin der Photonen 1 ist und es sich somit um Bosonen handelt. Da die Maxwellgleichungen linear sind, gilt zudem dass diese nicht miteinander wechselwirken können. Erklären Sie das. (1 Punkt)
Dies bedeutet aber auch, dass das thermodynamische Gleichgewicht nur durch eine Wechselwirkung mit den Wänden des Resonators erreicht werden kann. Folglich müssen die Wände zu einer bestimmten Temperatur T Photonen absorbieren bzw. emittieren. Dh. die Anzahl N der Photonen ist nicht konstant und die mittlere Anzahl der Photonen hängt von T und V ab. Was ergibt sich daraus für die Freie Energie F und das chemische Potential μ? (2 Punkte)

4. Berechnen Sie nun die (quantisierte) Energie der Photonen mithilfe der Dispersionsrelation und geben Sie eine entsprechende Verteilungsfunktion $n(\mathbf{k})$ an. (2 Punkte)

5. Wie lautet damit die Gesamtenergie des Systems? (2 Punkte)
Hinweis: Betrachten Sie eine Summe über alle möglichen Besetzungszustände.

6. Geben Sie nun die Grundzustandsenergie an, betrachten Sie anschließend den Übergang $V \longrightarrow \infty$ und zeigen Sie wiederum mithilfe der Dispersionsrelation, dass sich daraus die Plancksche Strahlungsverteilung
$$dE = \frac{V\hbar}{\pi^2 c^3} \frac{\omega^3 d\omega}{e^{\frac{\hbar\omega}{k_B T}} - 1} \tag{4}$$
ergibt. (3 Punkte)

7. Berechnen Sie damit die Gesamtenergie ($0 < \omega < \infty$). (1 Punkt)
Hinweis: $\int_0^\infty x^3/(e^x - 1) = \pi^4/15$.

8. Wie lautet damit die spezifische Wärme C_V? (1 Punkt)

Aufgabe 33: Fermi- und Bose-Statistik im klassischen Limes

(4 Punkte)

Die Großkanonischen Zustandssummen für Fermionen und Bosonen sind gegeben durch
$$Z^{\mathrm{f}} = \prod_s \left(1 + e^{-\beta(\varepsilon_s - \mu)}\right), \quad \text{bzw. } Z^{\mathrm{b}} = \prod_s \left(1 - e^{-\beta(\varepsilon_s - \mu)}\right)^{-1} \tag{5}$$
wobei μ das chemische Potential und ε_s die Energie eines Teilchens im Zustand s ist. Das Energiespektrum sei hierbei als unbegrenzt und die mittlere Teilchenzahl $\bar{N} < \infty$ als fest angenommen. Weiterhin gilt $\bar{N} = \sum_s \bar{n}_s$, mit $\bar{n}_s < \infty$ als mittlere Teilchenzahl im Zustand s. Diese sei ebenfalls fest.

1. Berechnen Sie die mittlere Teilchenzahl $\bar{n}_s$ im Zustand s für Fermionen bzw. Bosonen.

2. Zeigen Sie, dass die Fugazität $z = e^{\beta\mu}$ im Limes hoher Temperaturen sowohl für Fermionen als auch Bosonen gegen Null gehen muss.

3. Berechnen Sie im Limes hoher Temperaturen die mittlere Teilchenzahl $\bar{n}_s$ im Zustand s für Fermionen bzw. Bosonen.

4. Vergleichen Sie diese Ergebnisse mit der klassischen Boltzmann-Statistik.