

# Theoretische Physik I: Mechanik, Übung 4

---

Prof. Hans Peter Büchler SS 2009, 12. Mai 2009

## 1. Zum Noethertheorem (Schriftlich)

- (a) Für ein freies Teilchen hat die Lagrange Funktion die Form  $L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) = m\dot{\mathbf{r}}^2/2$ . Berechne, wie sich die Lagrange Funktion unter einem Galilei boost  $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r} + s\mathbf{v}t$  verändert. Zeige, dass sich der zusätzliche Term als eine totale Ableitung schreiben lässt.
- (b) Eine Symmetrie des Systems ist dann gegeben, wenn die zugehörige Transformation die Variation der Wirkung invariant lässt, d.h., wenn sich die Lagrange Funktion nur um eine totale Ableitung unterscheidet.

$$L \rightarrow L' = L(q^i, \dot{q}^i) + \frac{dF(q^i, \dot{q}^i, t)}{dt}. \quad (1)$$

Daher ist auch der Galilei boost aus (a) ebenfalls eine Symmetrie des Systems. Das Noether Theorem ergibt dann die Erhaltungsgösse

$$I(q^i, \dot{q}^i) = \left[ \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \frac{dh^i}{ds} - \frac{\partial F}{\partial s} \right]_{s=0} \quad (2)$$

Zeige, dass daher aus der Invarianz unter einem Galilei boost der Schwerpunktsatz folgt. Beweise auch diese Verallgemeinerung des Noether Theorems.

- 2. Federpendel in 2D (Übungsstunde)** Ein Massenpunkt der Masse  $m$  bewegt sich im homogenen Schwerfeld  $-g\mathbf{e}_y$  in der  $x - y$ -Ebene. Er ist an einer Feder (Federkonstante  $k$ , Federmasse vernachlässigbar) angebracht, die am oberen Ende fixiert ist. Die Länge der Feder in Ruhelage (ohne Masse  $m$ ) sei  $r_0$ , es gilt das Hookesche Gesetz.

- (a) Wähle geeignete Koordinaten und stelle die Lagrangefunktion sowie die Lagrangegleichungen des System auf.
- (b) Finde für den Fall kleiner Auslenkungen aus der Gleichgewichtslage ( $\dot{\varphi} \approx 0$  und  $\sin \varphi \approx 1$ ) Näherungslösungen der Bewegungsgleichungen.

- 3. Elektromagnetisches Feld (Schriftlich)** Ein Teilchen mit der Masse  $m$  und der Ladung  $q$  bewegt sich im elektrischen und magnetischen Feld  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{B}$  unter der Lorentz Kraft

$$\mathbf{F} = e\mathbf{E} + e\frac{\mathbf{v}}{c} \wedge \mathbf{B}. \quad (3)$$

Die Felder werden durch ein Vektorpotenzial  $\mathbf{A}$  sowie ein skalares Potenzial  $\phi$  beschrieben,  $\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{A}$  und  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ .

- (a) Betrachte ein Teilchen in einem homogenen Magnetfeld entlang der  $z$ -Achse, d.h.,  $\mathbf{B} = B\mathbf{e}_z$ . Zeige, dass sich die Potentiale dazu schreiben lassen als

$$\phi = 0, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -yB \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Zeige, dass die Teilchen Trajektorie

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} \cos(\omega_c t) \\ \sin(\omega_c t) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5)$$

mit der Zyklotron Frequenz  $\omega_c = eB/mc$  eine Lösung der Bewegungsgleichung ist.

- (b) Gib zur Lagrangefunktion mit dem geschwindigkeitsabhängigen Potenzial

$$L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) = \frac{m}{2}\dot{\mathbf{r}}^2 + \frac{e}{c}\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) - q\phi(\mathbf{r}, t) \quad (6)$$

die Lagrangegleichungen an. Um welche Bewegungsgleichung handelt es sich? (*Hinweis: Bestimme die Lagrangegleichungen komponentenweise, d.h. bestimme  $\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}) - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0$ , es gilt:  $(\mathbf{a} \times \mathbf{b})_i = \epsilon_{ijk}\mathbf{a}_j\mathbf{b}_k$* )

- (c) Bestimme den kanonisch konjugierten Impuls. Wie unterscheidet sich dieser vom kinetischen Impuls  $m\dot{\mathbf{r}}$ ?
- (d) Für ein geladenes Teilchen im homogenen Magnetfeld, siehe (a), ist die Lagrange Funktion translations invariant in  $x$  Richtung, d.h.,  $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r} + s\mathbf{e}_x$  ist eine Symmetrie. Berechne mittels Noether Theorem die Erhaltungsgröße und überprüfe für die spezielle Trajektorie in (a) dass die Größe wirklich erhalten ist.