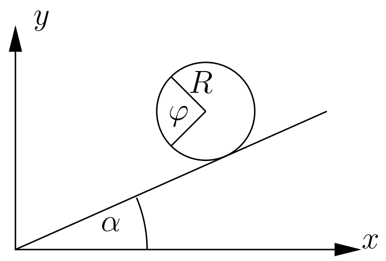
Theoretische Physik I: Mechanik, Übung 5

Prof. Hans Peter Büchler SS 2009, 19. Mai 2009

1. Schiefe Ebene und rollender Zylinder (Schriftlich)



(a) Ein Teilchen mit Masse m gleitet im Gravitationpotential $V = mgy$ auf einer schiefen Ebene (Winkel α) ohne Reibung. Gib die Zwangsbedingungen an und stelle die Lagrange-Funktion auf. Leite anschliessend die Bewegungsgleichung her und löse diese.

(b) Nun wird die schiefe Ebene durch eine Parabel $y = cx^2$ ersetzt. Wie lauten jetzt die Zwangsbedingungen? Gib die Lagrange-Funktion für den Fall an, dass sowohl die Steigung c als auch die Auslenkung x klein ist.

(c) Betrachte jetzt einen hohlen Zylinder mit Radius R (Trägheitsmoment $I = mR^2$). Dieser rollt jetzt reibungsfrei und ohne Schlupf auf denselben Flächen wie in (a) und (b). Schreibe wieder die Zwangsbedingungen und die Lagrange Funktion auf und untersuche wie sich die Bewegung verändert.

2. Streutheorie (Schriftlich)

Für die Streuung eines Teilchens der Energie $E > 0$ an einem Potential $V(r)$ mit dem Stoßparameter b kann man für den Streuwinkel φ folgende Formel herleiten:

$$\varphi = \pi - 2\int_{r_{min}}^{\infty} \frac{b\,dr}{r^2\sqrt{1 - \frac{b^2}{r^2} - \frac{V(r)}{E}}}$$

(a) Bestimme den minimalen Abstand r_{min} für die folgende Potentiale

i) $V(r) = \begin{cases} \infty, & r < a \\ 0, & r > a \end{cases}$

ii) $V(r) = \begin{cases} -V_0, & r < a \\ 0, & r > a \end{cases}$ mit $V_0 > 0$.

Hinweis: Beim zweiten Potential ist es sinnvoll, die Abkürzung $n = \sqrt{1 + V_0/E}$ einzuführen.

(b) Berechne damit die Streuwinkel als Funktion des Stoßparameters für die beiden Fälle.

3. Die Schlittschuhläuferin (Schriftlich)
Im Zentrum eines zugefrorenen Sees befinden sich ein Baum. Um diesen Baum dreht Katarina mit konstanter Geschwindigkeit ihre Runden. Zwischen Baum und Katarina ist ein Seil gespannt, welches sich aufgrund des Umrundens langsam aufwickelt. Zwei Beobachter streiten darüber, was passieren wird:

1) Der erste sagt: "Aus Drehimpulserhaltung folgt, das Katarina immer schneller wird, je mehr sich das Seil aufrollt."
2) Der zweite sagt: "Wir haben Energieerhaltung und daher bleibt Katarina immer gleich schnell."

Welcher der beiden Beobachter hat Recht? Begründe deine Antwort. Eine Rechnung ist nicht nötig.

4. Lenzscher Vektor (Übungstunde)

Gegeben sei das Keplerproblem

$$\mu\ddot{\mathbf{r}} = -A\frac{\mathbf{r}}{r^3}. \tag{1}$$

(a) Zeige, dass der Lenzsche Vektor ($\mathbf{L}_r$: Drehimpuls)

$$\mathcal{L} = \mu\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{L}_r - \mu A\frac{\mathbf{r}}{r} \tag{2}$$

eine Erhaltungsgröße ist. Wie kann man diese geometrisch interpretieren?

(b) Wie hängt der Betrag des Lenzschen Vektors mit der Exzentrizität ε der Keplerbahn zusammen? (Hinweis: Berechne zunächst $\mathcal{L}\mathbf{r}$).

(c) Betrachte nun eine Störung durch ein zusätzliches Potenzial $V = \delta/r^2$. Berechne die zeitliche Änderung des Lenzschen Vektors $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{L}$ und skizziere die Bahnkurven für den Fall kleiner Störungen.