

Theoretische Physik I: Mechanik, Übung 7

Prof. Hans Peter Büchler SS 2009, 9 Juni 2009

- 1. Gekoppelte Pendel (Schriftlich)** Zwei Pendel unterschiedlicher Massen seien durch eine masselose Feder (Federkonstante d) gekoppelt. Die Ruhelänge der Feder ist gleich dem Abstand zwischen den Aufhängepunkten der Pendel. Die Pendel sollen nur Schwingungen kleiner Amplitude vollführen.
- Stelle die Lagrangefunktion auf und berechne das System von Bewegungsgleichungen.
 - Schreibe die Bewegungsgleichungen in Matrixform und mache den Lösungsansatz $\mathbf{x}_i = \mathbf{X}_i \exp \omega_i t$. Aus dem entstandenen, linearen Gleichungssystem können nun die Vektoren \mathbf{X}_i berechnet werden. Gib auch die Bestimmungsgleichung für ω_i an. Was ist die gesamte Lösung der Gleichungen?
 - Nun gilt $m_1 = m_2$. Zum Zeitpunkt t_0 soll die Auslenkung beider Pendel null sein. m_1 hat bei t_0 die Geschwindigkeit v_0 während m_2 in Ruhe ist. Berechne zunächst die Frequenzen ω_i , dann die Lösung der Bewegungsgleichungen. Wie verändert sich der Anfangszustand? Hinweis: Additionstheoreme sind vielleicht nützlich.

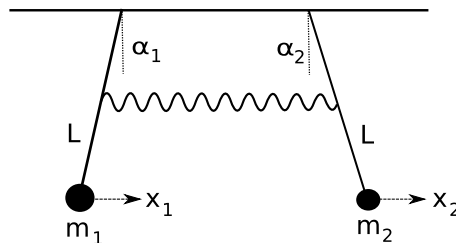


Abbildung 1: Zu Aufgabe 1

- 2. Fliehkraft Aufzug (Schriftlich)** Zwei unterschiedliche Massen m und M seien über ein masseloses Seil der Länge l miteinander verbunden. m rotiere reibungslos auf einer Ebene, während M über das gespannte Seil mit m verbunden ist. Auf M wirke die Erdanziehung.
- Wähle geeignete Koordinaten und stelle die Lagrangefunktion sowie die Lagrangegleichungen des Systems auf.
 - Zur Zeit t_0 besitze die obere Masse die Winkelgeschwindigkeit ϕ_0 . Wie hängt \dot{r} von r ab. Berechne den stationären radius r_s , bei welchem die untere Masse M sich nicht bewegt.

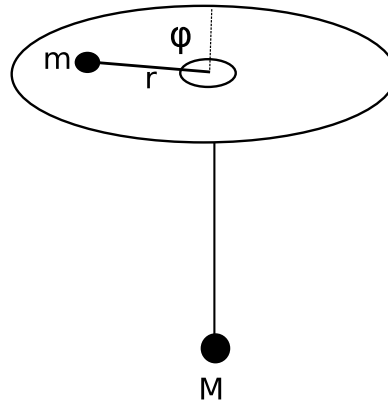


Abbildung 2: Zu Aufgabe 2

- (c) Nun soll der unteren Masse ein Stoss versetzt werden, so dass sie hin und her schaukelt. Wäre r_s unter diesen Bedingungen eine stabile Lösung? (Keine ausführliche Rechnung nötig!)

3. Spezielle Lorentztransformation (mündlich) Gegeben seien zwei Inertialsysteme IS und IS' deren Achsen parallel sind. IS' bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit v in x -Richtung. Zum Zeitpunkt $t = 0$ sollen sich die beiden Koordinatensysteme decken, d.h. $(ct, x, y, z) = (ct', x', y', z') = (0, 0, 0, 0)$. Gesucht ist die spezielle Transformation zwischen x, t und x', t' . Da diese nicht von der x - und y -Richtung abhängig ist, wählen wir den speziellen Ansatz:

$$(\Lambda_{\beta}^{\alpha}) = \begin{pmatrix} \Lambda_0^0 & \Lambda_1^0 & 0 & 0 \\ \Lambda_0^1 & \Lambda_1^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

- (a) Aus $\Lambda^T g \Lambda = g$ (mit g dem metrischen Tensor $\text{diag}(1, -1, -1, -1)$) erhält man vier Bedingungen für die Λ_{β}^{α} . OBdA können wir $\Lambda_0^1 = -\sinh \psi$ und $\Lambda_1^0 = -\sinh \varphi$ setzen. Bestimme Λ_0^0 und Λ_1^1 und vergleiche das Ergebnis mit der bekannten Form einer orthogonalen Transformation in zwei Dimensionen. ψ, φ lässt sich aus der Forderung $x'^0 = ct', x'^1 = 0$ und $x^0 = ct, x^1 = vt$ bestimmen.
- (b) Betrachte nun ein drittes, ebenfalls achsenparalleles, Bezugssystem IS'', das sich gegenüber IS' mit der Geschwindigkeit v_2 bewegt. Mit welcher Geschwindigkeit bewegt sich IS'' gegenüber IS? Gib eine Formel für die relativistische Addition der Geschwindigkeiten an.
- (c) Zeige nun was für den Grenzfall von v_n mit $n \rightarrow \infty$ von n sich relativ zueinander bewegenden Bezugssystemem folgt, für die jeweils gilt: IS⁽ⁿ⁾ bewegt sich mit der Geschwindigkeit $v = a \cdot c$, $0 < a < 1$ gegenüber IS⁽ⁿ⁻¹⁾.