Theoretische Quantenoptik, Übung 2

Prof. Hans Peter Büchler SS 2011, 10. Jun. 2011

1. Mastergleichung eines Zweizustandssystems (Schriftlich)

Wir betrachten ein Zweizustandssystem mit Hamiltonian $H_{\text{S}} = \hbar\omega_0\sigma_z/2$ (σ bezeichne hier allgemein die Pauli-Matrizen) gekoppelt an ein Lichtfeld (harmonisches Bad) mit Hamiltonian $H_{\text{B}} = \hbar\sum_{\mathbf{k}}\omega_{\mathbf{k}}b^\dagger(k)b(k)$. Die Kopplung ist gegeben durch

$$\begin{aligned} H_{\text{I}} &= -DE, \\ D &= \begin{pmatrix} 0 & d \\ d & 0 \end{pmatrix}, \\ E &= i\sum_k\sqrt{\frac{2\pi\hbar\omega_k}{V}}\left(b(\mathbf{k}) - b^\dagger(\mathbf{k})\right), \end{aligned} \tag{1}$$

wobei D der Dipoloperator mit Dipolmatrixelementen d (diese werden als reell angenommen), und E das elektrische Feld bezeichnen. Beachte, dass wir hier die Polarisation vernachlässigen (vereinfacht die Rechnung, ohne etwas wesentliches zu ändern), und wir deshalb später einen kleinen Korrekturfaktor einführen müssen.

Der Gesamt-Hamiltonian ist damit gegeben durch $H = H_{\text{S}} + H_{\text{B}} + H_{\text{I}}$.

(a) Zerlege den Dipoloperator D in Eigenoperatoren von H_{S}, mit der Definition für Eigenoperatoren

$$A(\omega) := \sum_{\varepsilon'-\varepsilon=\hbar\omega}\Pi(\varepsilon)D\Pi(\varepsilon'), \tag{2}$$

wobei $\Pi(\varepsilon)$ den Projektor auf den Unterraum mit Energie-Eigenwert ε beschreibt.

(b) Berechne die Kommutatoren $[A(\omega), H_{\text{S}}]$.

(c) Schreibeden Dipoloperator D im Wechselwirkungsbild.

Tipp: Für die weitere Rechnung ist es sinnvoll, wenn man die Definition des elektrischen Feldes im Wechselwirkungsbild $E(t)$ erst später einsetzt.

(d) Verwende die vorigen Ergebnisse, um

$$\frac{d}{dt}\rho_{\text{S}} = -\frac{1}{\hbar^2}\int_0^\infty ds\,\text{Tr}_{\text{B}}[H_{\text{I}}(t),[H_{\text{I}}(t-s)],\rho_{\text{S}}(t)\rho_{\text{B}}] \tag{3}$$

auf die Form

$$\frac{d}{dt}\rho_{\text{S}} = \sum_{\omega',\omega}\Gamma(\omega)e^{-i(\omega+\omega')t}\left[\sigma_\omega\rho_{\text{S}}\sigma_{\omega'} - \sigma_{\omega'}\sigma_\omega\rho_{\text{S}}\right] + h.c. \tag{4}$$

zu bringen. ($h.c.$ steht für hermitesch konjugiert, und $\sigma_\omega = \sigma_\pm := (\sigma_1 \pm i\sigma_2)/2$).

(e) Wir vernachlässigen nun alle schnell rotierenden Terme (Rotating Wave Approximation), und betrachten nur Terme mit $\omega + \omega' = 0$. Schreibe die Gl. (4) in dieser Näherung.

(f) Verwende nun die Erwartungswerte für ein thermisches Bad

$$\langle b(\mathbf{k})b(\mathbf{k}')\rangle = \langle b^\dagger(\mathbf{k})b^\dagger(\mathbf{k}')\rangle = 0 \tag{5}$$
$$\langle b(\mathbf{k})b^\dagger(\mathbf{k}')\rangle = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}(1 + N(\omega_k)) \tag{6}$$
$$\langle b^\dagger(\mathbf{k})b(\mathbf{k}')\rangle = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}N(\omega_k) \tag{7}$$

mit $N(\omega_k) = 1/(e^{\beta\hbar\omega_k} - 1)$, um $\Gamma(\omega)$ zu vereinfachen. Beachte $\langle b\rangle = \mathrm{Tr}_{\mathrm{B}} b\rho_{\mathrm{B}}$.

(g) Gehe nun über zu einer kontinuierlichen Beschreibung des k-Vektors, mit

$$\frac{1}{V}\sum_{\mathbf{k}} \to \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} = \frac{1}{(2\pi)^3 c^3}\int_0^\infty d\omega_k\, \omega_k^2 \int d\Omega. \tag{8}$$

Berechne $\Gamma(\omega)$ mit der Identität

$$\int_0^\infty ds\, e^{-i\epsilon s} = \pi\delta(\epsilon) - iP\frac{1}{\epsilon} \tag{9}$$

wobei P den Cauchy Hauptwert bezeichnet. Beachte, dass wir das Integral über den Raumwinkel aufgrund der vernachlässigten Polarisation auf $\int d\Omega = 8\pi/3$ setzen müssen.

(h) Wie sieht die Mastergleichung unter Vernachlässigung der Cauchy-Hauptwert-Beiträge aus?

(i) Löse die Mastergleichung für das Zweizustandssystem für eine beliebige Dichtematrix ρ.

2. Dekohärenz (Schriftlich)

Wir verwenden nun als Kopplungsterm

$$H_{\mathrm{I}} = \sum_n |n\rangle\langle n| \otimes B_n(t), \tag{10}$$

wobei die Projektoren $|n\rangle\langle n|$ mit H_{S} vertauschen sollen.

(a) Leite analog zur ersten Aufgabe die Mastergleichung für diese Kopplung her, wobei $\langle B_n(t)B_m(t-s)\rangle = \Gamma\delta(s)\delta_{nm}$ sei.

(b) Löse diese Mastergleichung für ein Zweizustandssystem.

(c) Was ist der fundamentale Unterschied in der Zeitentwicklung zwischen dieser und der in Aufgabe 1 verwendeten Kopplung?