Theoretische Quantenoptik, Übung 3

Prof. Hans Peter Büchler SS 2011, 24. Jun. 2011

1. Zerfall in ein Squeezed Vacuum (Schriftlich)

Um Verwirrungen vorzubeugen werde ich dieses Blatt in der gleichen Notation wie die Vorlesung gestalten. Insbesondere bezieht sich das auf die Rotating Wave Approximation, die auf dem vorigen Übungsblatt mit $\omega + \omega'$ angegeben wurde, und jetzt mit $\omega - \omega'$ verwendet wird, siehe Gl. (1).

Der Startpunkt sei die *Proto-Master-Gleichung*

$$\frac{d}{dt}\rho_{\mathrm{s}} = \sum_{\omega,\omega'} e^{i(\omega'-\omega)t}\Gamma(\omega)\left[A(\omega)\rho_{\mathrm{s}}A^\dagger(\omega') - A^\dagger(\omega')A(\omega)\rho_{\mathrm{s}}\right] + h.c. \tag{1}$$

mit

$$\begin{aligned}\Gamma(\omega) = \frac{1}{\hbar^2}\sum_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}\sqrt{\frac{2\pi\hbar\omega_{\mathbf{k}}}{V}}\sqrt{\frac{2\pi\hbar\omega_{\mathbf{k}'}}{V}}\int_0^\infty ds \\ \Big[\langle b(\mathbf{k})b^\dagger(\mathbf{k}')\rangle \exp[+i(\omega_{\mathbf{k}'}-\omega_{\mathbf{k}})t - i(\omega_{\mathbf{k}'}-\omega)s] \\ + \langle b^\dagger(\mathbf{k})b(\mathbf{k}')\rangle \exp[-i(\omega_{\mathbf{k}'}-\omega_{\mathbf{k}})t + i(\omega_{\mathbf{k}'}+\omega)s] \\ - \langle b(\mathbf{k})b(\mathbf{k}')\rangle \exp[-i(\omega_{\mathbf{k}'}+\omega_{\mathbf{k}})t + i(\omega_{\mathbf{k}'}+\omega)s] \\ - \langle b^\dagger(\mathbf{k})b^\dagger(\mathbf{k}')\rangle \exp[+i(\omega_{\mathbf{k}'}+\omega_{\mathbf{k}})t - i(\omega_{\mathbf{k}'}-\omega)s]\Big]\end{aligned} \tag{2}$$

wobei wir wieder die Polarisation des Lichtfeldes ignorieren ($\int d\Omega = 8\pi/3$).

(a) Berechne $\Gamma(\omega)$ für das Squeezed Vacuum mit Erwartungswerten

$$\begin{aligned}\langle b(\mathbf{k})b(\mathbf{k}')\rangle &= \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}M_k & \langle b^\dagger(\mathbf{k})b^\dagger(\mathbf{k}')\rangle &= \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}M_k^* \\ \langle b(\mathbf{k})b^\dagger(\mathbf{k}')\rangle &= \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}(1+N(\omega_k)) & \langle b^\dagger(\mathbf{k})b(\mathbf{k}')\rangle &= \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}N(\omega_k)\end{aligned} \tag{3}$$

mit $N_k = \sinh^2 r_k$ und $M_k = -\cosh r_k \sinh r_k e^{i\theta_k}$, sowie unter Vernachlässigung des Lamb-Shifts (verwende $\int ds e^{-is\varepsilon} = \pi\delta(\varepsilon)$).

Bringe das Ergebnis auf die Form

$$\Gamma(\omega) = \Gamma^{(1)}(\omega) + \Gamma^{(2)}(\omega) \tag{4}$$

$$\Gamma^{(2)}(\omega) = -\frac{2|\omega|^3}{2\hbar c^3}e^{2i\omega t}\begin{cases} M^* & \omega > 0 \\ M & \omega < 0\end{cases} \tag{5}$$

(b) Wie sieht die Resonanzbedingung für die Rotating Wave Approximation aus?

(c) Zeige nun, dass sich daraus die Master-Gleichung

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\rho_{\rm s}(t) =&\gamma_0(N+1)\left(\sigma_-\rho_{\rm s}(t)\rho_+ - \frac{1}{2}\sigma_+\sigma_-\rho_{\rm s}(t) - \frac{1}{2}\rho_{\rm s}(t)\sigma_+\sigma_-\right)\\ &+\gamma_0 N\left(\sigma_+\rho_{\rm s}(t)\rho_- - \frac{1}{2}\sigma_-\sigma_+\rho_{\rm s}(t) - \frac{1}{2}\rho_{\rm s}(t)\sigma_-\sigma_+\right)\\ &-\gamma_0 M\sigma_+\rho_{\rm s}(t)\rho_+ - \gamma_0 M^*\sigma_-\rho_{\rm s}(t)\rho_-\end{aligned} \tag{6}$$

ergibt, mit $\gamma_0 = 4\omega_0^3 d^2/3\hbar c^3$. Vergleiche das Ergebnis mit der Master-Gleichung aus Blatt 2.

(d) Zeige, dass sich die Master-Gleichung mit $C = \sigma_- \cosh r + \sigma_+ \sinh r e^{i\theta}$ auf Lindblad Form bringen lässt.

(e) Löse die Master-Gleichung mit dem Bloch-Vektor Ansatz $\mathbf{v}(t) = \langle\boldsymbol{\sigma}\rangle(t)$,

$$\rho(t) = \frac{1}{2}\left(I + \langle\boldsymbol{\sigma}\rangle(t)\cdot\boldsymbol{\sigma}\right), \tag{7}$$

für $\theta = 0$.

(f) Vergleiche das Ergebnis mit der Lösung von Blatt 2.

2. DGL für die Wigner-Funktion (Schriftlich)

Die Wigner-Funktion $W(\alpha)$ ist die Fourier-Transformierte des Charakteristischen Polynoms $\chi(\beta) = \operatorname{Tr} D\rho$, mit $D = e^{\beta a^\dagger - \beta^* a}$. Wir verwenden diese Relationen, um eine DGL für die Wigner-Funktionen herzuleiten.

(a) Beweise die Relationen

$$\begin{aligned} Da &= \left(-\frac{\beta}{2} - \frac{\partial}{\partial\beta^*}\right)D \quad & a^\dagger D &= \left(\frac{\partial}{\partial\beta} + \frac{\beta^*}{2}\right)D\\ Da^\dagger &= \left(\frac{\partial}{\partial\beta} - \frac{\beta^*}{2}\right)D & aD &= \left(\frac{\beta}{2} - \frac{\partial}{\partial\beta^*}\right)D \end{aligned} \tag{8}$$

Tipp: Blatt 1.

(b) Berechne nun

$$\operatorname{Tr} D\frac{\partial\rho_{\rm s}}{\partial t} = \partial_t\chi(\beta) = \ldots \tag{9}$$

mit der Master-Gleichung

$$\begin{aligned}\partial_t\rho/\gamma =&(N+1)\left[a\rho a^\dagger - \frac{1}{2}a^\dagger a\rho - \frac{1}{2}\rho a^\dagger a\right] + N\left[a^\dagger\rho a - \frac{1}{2}aa^\dagger\rho - \frac{1}{2}\rho a a^\dagger\right]\\ &+ M\left[a^\dagger\rho a^\dagger - \frac{1}{2}a^\dagger a^\dagger\rho - \frac{1}{2}\rho a^\dagger a^\dagger\right] + M^*\left[a\rho a - \frac{1}{2}aa\rho - \frac{1}{2}\rho aa\right].\end{aligned} \tag{10}$$

(c) Zeige aus der Definition der Wigner-Funktion $W(\alpha) = \int d^2\beta\, e^{\alpha\beta^* - \alpha^*\beta}\chi(\beta)$ die Relationen

$$\int d^2\beta\, e^{\alpha\beta^* - \alpha^*\beta}\beta^*\beta\chi(\beta) = -\frac{\partial^2 W(\alpha)}{\partial\alpha\partial\alpha^*} \tag{11}$$

$$\int d^2\beta\, e^{\alpha\beta^* - \alpha^*\beta}\beta^*\frac{\partial}{\partial\beta^2}\chi(\beta) = -\frac{\partial}{\partial\alpha}[\alpha W(\alpha)] \tag{12}$$

(d) Leite mit den Ergebnissen von (b) und (c) eine DGL für die Wigner-Funktion her.