Lösung Repetitionsübung II

A1: Differential- und Integralrechnung

a)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{e}^{-x^6/2} = -3x^5\,\mathrm{e}^{-x^6/2}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln(1+x^2) = \frac{2x}{1+x^2}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{e}^x \sin x = (\sin x + \cos x)\,\mathrm{e}^x$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_1^x \mathrm{d}t\, x^2 t\right) = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^4 - x^2) = 2x^3 - x$$

$$\text{alternativ:} \qquad = x^2 \cdot x + \int_1^x \mathrm{d}t\, 2xt = 2x^3 - x$$

b)

$$\int_0^\pi \mathrm{d}x\, \sin x = 2$$

$$\int_0^2 \mathrm{d}x\, 2x\,\mathrm{e}^{x^2} = \mathrm{e}^{x^2}\Big|_0^2 = \mathrm{e}^4 - 1$$

$$\int_0^1 \mathrm{d}x\, x\,\mathrm{e}^x = x\,\mathrm{e}^x\Big|_0^1 - \int_0^1 \mathrm{d}x\, \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^1 - (\mathrm{e}^1 - 1) = 1$$

c) Die Funktion $f(\mathbf{r}) = f(x,y,z) = xyz$ wechselt ihr Vorzeichen unter Inversion: $f(-\mathbf{r}) = -f(\mathbf{r})$. Daher verschwindet das Integral über die Einheitskugel. Konkret können wir das am ϕ-Integral in Kugelkoordinaten sehen:

$$\int_K \mathrm{d}\mathbf{r}\, xyz = \int_0^1 \mathrm{d}r \int_0^\pi \mathrm{d}\vartheta \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi\, r^2 \sin\vartheta \cdot r\sin\vartheta\cos\phi \cdot r\sin\vartheta\sin\phi \cdot r\cos\vartheta$$

Das ϕ-Integral ergibt: $\int\limits_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi\, \cos\phi \sin\phi = \frac{1}{2}\sin^2\phi\Big|_0^{2\pi} = 0$. Daher verschwindet das gesamte Integral.

Das zweite Integral können wir mittels der Substitution $u = \cos\vartheta$ lösen (sehr oft hilfreich bei Integralen in Kugelkoordinaten):

$$\begin{aligned}\int_K \mathrm{d}\mathbf{r}\, z^2 &= 2\pi \int\limits_0^1 \mathrm{d}r \int\limits_0^\pi \mathrm{d}\vartheta\, r^2 \sin\vartheta \cdot r^2 \cos^2\vartheta = 2\pi \int\limits_0^1 \mathrm{d}r\, r^4 \int\limits_{-1}^1 \mathrm{d}(\cos\vartheta)\, \cos^2\vartheta \\ &= 2\pi \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4\pi}{15}\end{aligned}$$

d) Wir verwenden erneut Kugelkoordinaten und die gleiche Substitution:

$$\begin{aligned}\int_A \mathrm{d}S\,(1-3z^2) \qquad & \left[= 2\pi \int\limits_0^\pi \mathrm{d}\theta\, \sin\theta \left(1 - 3\cos^2\theta\right)\right] \\ &= 2\pi \int\limits_{-1}^1 \mathrm{d}(\cos\theta)\, \left(1 - 3\cos^2\theta\right) \\ &= 2\pi\left(u - u^3\right)\Big|_{-1}^1 = 0\end{aligned}$$

e) In Zylinderkoordinaten:

$$\int_V \mathrm{d}\mathbf{r}\, \frac{z^2}{1+x^2+y^2} = 2\pi \int\limits_0^1 \mathrm{d}z\, z^2 \int\limits_0^1 \mathrm{d}r\, \frac{r}{1+r^2} = \frac{2\pi}{3} \cdot \frac{1}{2} \ln\left(1+r^2\right)\Big|_0^1 = \frac{\pi}{3}\ln 2$$

A2: Gewöhnliche Differentialgleichungen

a) Für die Differentialgleichung

$$y'' + ay' + 4y = 0$$

verwenden wir wie üblich den Ansatz e^{λ}. Wir erhalten das charakteristische Polynom

$$\lambda^2 + a\lambda + 4 = 0$$

mit den beiden Lösungen

$$\lambda_\pm = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - 4}.$$

Der kritische Punkt, für den $\lambda_+ = \lambda_-$ gilt, ist offensichtlich $a = \pm 4$. Für $|a| > 4$ ist die Wurzel rein reell und die beiden unabhängigen Lösungen der DGL fallen exponentiell ab (für $a > 4$) bzw. steigen exponentiell an (für $a < -4$). Für $|a| < 4$ bekommen die Lösungen $\lambda_\pm$ einen Imaginärteil und die Lösungen der DGL sind damit oszillierend.

b) Um die Lösung $y = \sin 2x = \frac{1}{2i}\left(\mathrm{e}^{2ix} - \mathrm{e}^{-2ix}\right)$ zu erhalten, benötigen wir die rein imaginären Nullstellen $\lambda_\pm = \pm 2i$. Das passiert gerade bei $a = 0$, wenn sich das char. Polynom zu $\lambda^2 = -4$ reduziert.

c) Für $a = \pm 4$ sind die Lösungen entartet: $\lambda_\pm = -2$. Eine Lösung lautet also e^{-2x}. Nach dem üblichen Schema gibt es eine zweite Lösung $x\,\mathrm{e}^{-2x}$. Die allgemeine Lösung mit zwei freien Konstanten ist also $(a + bx)\,\mathrm{e}^{-2x}$. Für $a = -4$ lautet die entsprechende Lösung $(a + bx)\,\mathrm{e}^{2x}$.

d) Die DGL $y' = y^2/x^2$ können wir umschreiben:

$$\frac{\mathrm{d}y}{y^2} = \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$$

Daraus erhalten wir nach Integration (und schieben der konstanten Faktoren in die Konstante):

$$\frac{1}{y(x)} = \frac{1}{x} + c$$

bzw.

$$y(x) = \frac{x}{1 + cx}$$

Der Grenzwert dieser Funktion für $x \longrightarrow \infty$ ist $1/c$. Für $c = 1$ erhalten wir daher die gewünschte Funktion mit Grenzwert 1:

$$y(x) = \frac{x}{1 + x}$$

A3: Vektoranalysis

a)

$$\nabla\psi(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} -y\sin x \\ \cos x \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Delta\psi = -y\cos x$$

$$\operatorname{div}\mathbf{A}(\mathbf{r}) = 2xy(y + z)$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} 2xz + xz^2 \\ -yz^2 \\ -2x^2y - z^2 \end{pmatrix}$$

b) Wir berechnen zunächst

$$\nabla \frac{1}{|\mathbf{r}|} = -\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}$$

daraus folgt durch Verschiebung direkt

$$\nabla \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{a}|} = -\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{a})}{|\mathbf{r}-\mathbf{a}|^3}$$

und damit

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} - \frac{(\mathbf{r}-\mathbf{a})}{|\mathbf{r}-\mathbf{a}|^3}$$

c) Es ist

$$\Delta \frac{1}{|\mathbf{r}|} = -\operatorname{div} \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} = \frac{3}{|\mathbf{r}|^3} - \frac{3x^2}{|\mathbf{r}|^5} - \frac{3y^2}{|\mathbf{r}|^5} - \frac{3z^2}{|\mathbf{r}|^5} = 0 \qquad \text{für } \mathbf{r} \neq \mathbf{0}.$$

Damit ist aufgrund der Linearität von Δ auch $\Delta\phi(\mathbf{r}) = 0$ für $\mathbf{r} \notin \{\mathbf{0}, \mathbf{a}\}$. Die Funktion $\Delta\phi(\mathbf{r}) = \operatorname{div} \mathbf{F}(\mathbf{r})$ gibt uns die Quellen des Kraftfeldes $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ an. Dies sind aber die beiden Punktladungen bei $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ und $\mathbf{r} = \mathbf{a}$. Für alle $\mathbf{r}$ können wir also schreiben:

$$\Delta\phi(\mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r}) + \delta(\mathbf{r}-\mathbf{a})$$

Damit wird offensichtlich, warum $\Delta\phi(\mathbf{r})$ an den Stellen $\mathbf{0}$ und $\mathbf{a}$ nicht definiert ist.

A4: Fourierreihen

a) Wir berechnen die Fourierkoeffizienten der Funktion $f(x) = \exp(x)$ auf dem Intervall $[0, 2\pi]$. Mit $k_n = 2\pi n/L = n$ und $n \in \mathbb{Z}$ gilt:

$$c_n = \hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}x \; \mathrm{e}^{-ik_n x} \, \mathrm{e}^{x} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}x \; \mathrm{e}^{x(1-in)} = \frac{\mathrm{e}^{2\pi} - 1}{2\pi(1-in)}$$

Damit lautet dir Fourierreihe

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{2\pi} - 1}{2\pi(1-in)} \, \mathrm{e}^{inx}$$

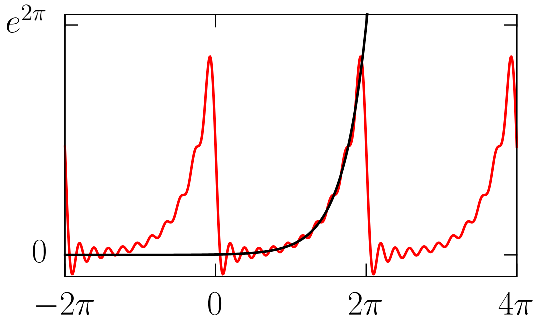

Fig. 1: Abgeschnittene Fourier-Reihe mit $n = -10, \ldots, 10$ der Funktion e^x auf dem Intervall $[0, 2\pi]$ mit typischem Gibbs-Phänomen.

b) Wir berechnen

$$\begin{aligned}
\hat{h}(n) &= \frac{1}{L}\int_0^L \mathrm{d}x\, h(x)\, \mathrm{e}^{-ik_n x} \\
&= \frac{1}{L}\int_0^L \mathrm{d}x\, g(x)\cos(2\pi x/L)\, \mathrm{e}^{-ik_n x} \\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{L}\int_0^L \mathrm{d}x\, g(x)\left(\mathrm{e}^{2\pi i x/L} + \mathrm{e}^{-2\pi i x/L}\right)\mathrm{e}^{-ik_n x} \\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{L}\int_0^L \mathrm{d}x\, g(x)\left(\mathrm{e}^{-ik_{n-1}x} + \mathrm{e}^{-ik_{n+1}x}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\hat{g}(n-1) + \hat{g}(n+1)\right)
\end{aligned}$$

Hinweis:
Ganz allgemein führt eine *Multiplikation mit einem Phasenfaktor*, hier $\mathrm{e}^{\pm 2\pi i x/L}$, zu einer *Verschiebung* im Fourier-Raum: hier $n \longrightarrow n \mp 1$.