Lösung Repetitionsübung

A1: Differential- und Integralrechnung

a)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{e}^{-x^2/4} = -\frac{x}{2}\,\mathrm{e}^{-x^2/4}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln\sinh(x\,\mathrm{e}^x+1) = \frac{\cosh(x\,\mathrm{e}^x+1)}{\sinh(x\,\mathrm{e}^x+1)}(\mathrm{e}^x + x\,\mathrm{e}^x) = \mathrm{e}^x(1+x)\coth(x\,\mathrm{e}^x+1)$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x \mathrm{d}y\ \mathrm{e}^{-xy} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(-\frac{1}{x}\left(\mathrm{e}^{-x^2}-1\right)\right) = \frac{1}{x^2}\left(\mathrm{e}^{-x^2}-1\right) - \frac{1}{x}\left(-2x\,\mathrm{e}^{-x^2}\right)\\ &= \left(2+\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{e}^{-x^2} - \frac{1}{x^2}\end{aligned}$$

b)

$$\int_0^1 \mathrm{d}x\, x^{1/2} = \frac{2}{3}$$

$$\int_{-\infty}^0 \mathrm{d}x\, x\,\mathrm{e}^{-x^2} = -\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-x^2}\Big|_{-\infty}^0 = -\frac{1}{2}$$

$$\int_{-1}^1 \mathrm{d}x\,\sqrt{1-x^2} = \text{halbe Fläche Einheitskreis} = \frac{\pi}{2}$$

c) In Zylinderkoordinaten:

$$\int \mathrm{d}\mathbf{r}\,\frac{z^2}{1+x^2+y^2} = 2\pi\int_0^1 \mathrm{d}z\,z^2\int_0^1 \mathrm{d}r\,\frac{r}{1+r^2} = 2\pi\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\int_0^1 \mathrm{d}r\,\frac{2r}{1+r^2} = \frac{\pi}{3}\ln 2$$

A2: Getriebenes freies Teilchen

a) Integriere $m\ddot{x} = 0$ zweimal:

$$x(t) = x_0 + v_0 t$$

b) Integriere $\ddot{x} = F_0 \sin \omega t$ zweimal[1]:

$$x(t) = -\frac{F_0}{\omega^2} \sin \omega t + at + b$$

Der erste Term ist die spezielle Lösung, die folgenden Terme sind die homogene Lösung aus (a). Aus $x(0) = 0$ folgt $b = 0$. Aus $\dot{x}(0) = 0$ folgt $-F_0/\omega + a = 0$. Damit ist

$$x(t) = -\frac{F_0}{\omega^2} (\omega t - \sin \omega t)$$

Beachte, dass sich das Teilchen für $t \to \infty$ Richtung $x \to \infty$ bewegt, da die periodische Kraft zuerst positiv ist.

c) Setze $y = \dot{x}$. Dann ist

$$\dot{y} = -\frac{\eta}{m} y^2$$

Mit der Anfangsbedingung $y(0) = v$ erhalten wir nach Integration:

$$-\frac{1}{y} + \frac{1}{v} = -\frac{\eta}{m} t$$

und damit

$$y = \dot{x} = \frac{1}{\frac{1}{v} + \frac{\eta}{m} t}$$

Nach Integration erhalten wir (kein Betrag nötig, falls $\eta, m, v > 0$)

$$x(t) = \frac{m}{\eta} \left[\ln \left(\frac{1}{v} + \frac{\eta}{m} t \right) - \ln \frac{1}{v} \right] = \frac{m}{\eta} \ln \left(1 + \frac{\eta}{m} v t \right) \tag{1}$$

wobei wir die Integrationskonstante aufgrund von $x(0) = 0$ direkt auf 0 gesetzt haben.

(Anmerkung) Dimensionsanalyse: Betrachte die Differentialgleichung $m\ddot{x} + \eta |\dot{x}|^\alpha = 0$ für fixes $\alpha \geq 0$ mit der Anfangsbedingung $x(0) = 0$ und $\dot{x}(0) = v$. Wir erwarten, dass die Reibungskraft das Teilchen nach einer gewissen Zeit T zum Stillstand bringt. Das Teilchen hat bis dahin einen Gesamtweg L zurückgelegt.

Nachdem man die Gleichung durch die Masse geteilt hat, sind die einzig freien Parameter offensichtlich η/m und v. Man kann sich leicht überlegen, dass η/m die Einheit

$$[\eta/m] = \frac{[\text{Länge}]^{1-\alpha}}{[\text{Zeit}]^{2-\alpha}}$$

[1] Hier sollte statts F_0 wohl eher F_0/m stehen.

besitzen muss. Desweiteren hat man nur die Anfangsgeschwindigkeit mit Einheit [Länge]/[Zeit] zur Verfügung. Aus diesen beiden Größen können wir die charakteristische Zeit T und die charakteristische Länge L eindeutig *bis auf konstante Vorfaktoren* konstruieren:

$$T = \frac{mv^{1-\alpha}}{\eta}, \qquad L = \frac{mv^{2-\alpha}}{\eta}$$

Wir betrachten zunächst die charakteristische Zeit. Für $\alpha > 1$ ist T *umgekehrt* proportional zur Geschwindigkeit und für $\alpha = 1$ ist T unabhängig von der Geschwindigkeit. Beide Varianten widersprechen unserer physikalischen Intuition. Einzige Möglichkeit: für $\alpha \geq 1$ ist der konstante Vorfaktor unendlich. Das Teilchen bleibt niemals stehen.

Ebenso verhält es sich mit der charakteristischen Länge. Auch hier ist die Auflösung: für $\alpha \geq 2$ ist der konstante Vorfaktor vor L unendlich. Die Position des Teilchens geht für $t \to \infty$ gegen unendlich: siehe exakte Lösung für $\alpha = 2$ in (1).

Wir können also alleine aufgrund der Dimensionsanalyse Aussagen über das Verhalten des Systems treffen. Nur für $0 \leq \alpha < 1$ bleibt das Teilchen wirklich nach endlicher Zeit und Strecke stehen. In diesem Fall ergibt die vollständige Rechnung

$$T = \frac{mv^{1-\alpha}}{(1-\alpha)\eta}, \qquad L = \frac{mv^{2-\alpha}}{(2-\alpha)\eta}$$

in Einklang mit unserem Ergebnis aus der Dimensionsanalyse. Für $1 \leq \alpha < 2$ legt das Teilchen eine endliche Strecke zurück, bleibt jedoch niemals stehen.

A3: Differential- und Integralrechnung II

a)

$$\int \mathrm{d}x\,(2-3x)^4 = -\frac{1}{15}(2-3x)^5$$

In den folgenden beiden Integralen taucht jeweils die innere Ableitung bereits auf:

$$\int \mathrm{d}x\, 3x^2\,\mathrm{e}^{x^3} = \mathrm{e}^{x^3}$$

$$\int \mathrm{d}x\, 2x \cot x^2 = \ln \sin x^2$$

Das vierte Integral können wir zweimal partiell integrieren:

$$\int \mathrm{d}x\ \mathrm{e}^x \sin x = \mathrm{e}^x \sin x - \int \mathrm{d}x\ \mathrm{e}^x \cos x = \mathrm{e}^x(\sin x - \cos x) - \int \mathrm{d}x\ \mathrm{e}^x \sin x$$

Damit ist

$$\int \mathrm{d}x\ \mathrm{e}^x \sin x = \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^x(\sin x - \cos x)$$

Im letzten Integral können wir zunächst den Integrand vereinfachen, denn $\cos^3 x = (1-\sin^2 x)\cos x = (1+\sin x)(1-\sin x)\cos x$. Damit ist

$$\int \mathrm{d}x\, \frac{\cos^3 x}{1-\sin x} = \int \mathrm{d}x\ \cos x(1+\sin x) = \sin x + \frac{1}{2}\sin^2 x$$

Wiederholung (?) Wie können wir allgemein einen Ausdruck der Form

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\int_0^\lambda \mathrm{d}x\, g(x,\lambda)$$

berechnen? Wir definieren

$$F(s,\lambda) = \int_0^s \mathrm{d}x\, g(x,\lambda)$$

und nehmen an, dass $G(x,\lambda)$ eine Stammfunktion zu $g(x,\lambda)$ bezüglich x ist. Dann ist

$$F(s,\lambda) = G(s,\lambda) - G(0,\lambda)$$

mit den partiellen Ableitungen

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial s}F(s,\lambda) &= \frac{\partial}{\partial s}G(s,\lambda) = g(s,\lambda)\\ \frac{\partial}{\partial \lambda}F(s,\lambda) &= \int_0^s \mathrm{d}x\, \frac{\partial}{\partial\lambda}g(x,\lambda)\end{aligned}$$

Damit können wir nun die totale Ableitung mit der Kettenregel berechnen:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\int_0^\lambda \mathrm{d}x\, g(x,\lambda) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}F(\lambda,\lambda)\\ &= \frac{\partial}{\partial s}F(s,\lambda)\bigg|_{s=\lambda} + \frac{\partial}{\partial\lambda}F(\lambda,\lambda)\\ &= g(\lambda,\lambda) + \int_0^\lambda \mathrm{d}x\, \frac{\partial}{\partial\lambda}g(x,\lambda)\end{aligned}$$

Das heisst, man erhält die Summe aus dem Integranden an der oberen Grenze und dem Integral über die Ableitung.

b) Für $g(x,\lambda) = \left(\mathrm{e}^{-\lambda x^2} - 1\right)/x$ erhalten wir

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\int_0^\lambda \mathrm{d}x\, \frac{\mathrm{e}^{-\lambda x^2}-1}{x} &= \frac{\mathrm{e}^{-\lambda^3}-1}{\lambda} + \int_0^\lambda \mathrm{d}x\,(-x)\,\mathrm{e}^{-\lambda x^2}\\ &= \frac{\mathrm{e}^{-\lambda^3}-1}{\lambda} + \frac{\mathrm{e}^{-\lambda x^2}}{2\lambda}\bigg|_0^\lambda\\ &= \frac{3}{2\lambda}\left(\mathrm{e}^{-\lambda^3}-1\right)\end{aligned}$$

A4: Gewöhnliche Differentialgleichung

a) Gegeben ist die DGL

$$y'''(x) + 2y''(x) + 2y'(x) = 0$$

Wir setzen zunächst $z(x) = y'(x)$ und verwenden den Ansatz $z = \mathrm{e}^{\lambda x}$. Das char. Polynom lautet dann

$$\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$$

mit den Nullstellen $\lambda_{1,2} = -1 \pm i$. Damit ist die allgemeine Lösung für $z(x)$ bestimmt. Für $y(x)$ integrieren wir einmal:

$$y(x) = a\,\mathrm{e}^{\lambda_1 x} + b\,\mathrm{e}^{\lambda_2 x} + c$$

b) Wir erhalten das LGS

$$\begin{aligned} y(0) &= a + b + c = 2 \\ y'(0) &= (-1+i)a + (-1-i)b = -2 \\ y''(0) &= -2ia + 2ib = 0 \end{aligned}$$

Aus der dritten Gleichung erhalten wir direkt $a = b$. Mit Gleichung zwei lässt sich dann $a = b = 1$ erschliessen. Dann muss aufgrund der ersten Gleichung $c = 0$ sein. Damit finden wir sofort die Lösung

$$y(x) = 2\cos(x)\,\mathrm{e}^{-x}$$

c) Hier lautet das LGS

$$\begin{aligned} y(0) &= a + b + c = 2 \\ y'(0) &= (-1+i)a + (-1-i)b = -1 + i \\ y(\pi) &= a\,\mathrm{e}^{-\pi+i\pi} + b\,\mathrm{e}^{-\pi-i\pi} + c = -(a+b)\,\mathrm{e}^{-\pi} + c = 1 - \mathrm{e}^{-\pi} \end{aligned}$$

aus (1) und (3) erhält man $a + b = 1$ und $c = 1$. Aus (2) erhält man dann $a - b = 1$. Daher ist $a = 1$ und $b = 0$. Die Lösung lautet dann

$$y(x) = \mathrm{e}^{-x+ix} + 1$$

In der komplexen Ebene beschreibt die Funktion $1 + \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{e}^{ix}$ eine linksdrehende Spirale um den Mittelpunkt $\mathrm{Re}(y) = 1$ mit (schnell) schrumpfendem Radius e^{-x}, siehe Abbildung.

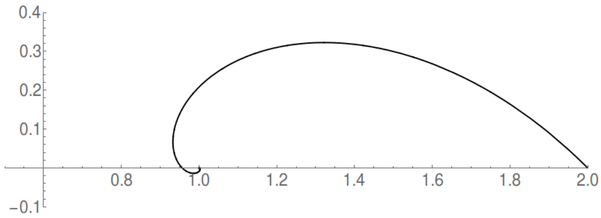

Fig. 1: Funktion $y(x) = 1 + \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{e}^{ix}$ in der Komplexe Ebene.

d) Wir suchen eine spezielle Lösung für

$$y'''(x) + 2y''(x) + 2y'(x) = x^2.$$

Wir können einen Polynom-Ansatz verwenden. Wir haben Ableitungen erster bis dritter Ordnung und das Polynom auf der rechten Seite ist von zweiter Ordnung. Wir können uns also auf Terme x^3, x^2 und x beschränken:

$$y_s(x) = ax^3 + bx^2 + cx$$

Damit erhalten wir:

$$6a + 12ax + 4b + 6ax^2 + 4bx + 2c = x^2$$

Koeffizientenvergleich ergibt: $6a = 1$, $12a + 4b = 0$, $6a + 4b + 2c = 0$. Damit erhalten wir die spezielle Lösung:

$$y_s(x) = \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} + \frac{x}{2}$$

Die allgemeine Lösung ergibt sich aus der speziellen Lösung und der allgemeinen Lösung aus Teil (a):

$$y(x) = a\,\mathrm{e}^{\lambda_1 x} + b\,\mathrm{e}^{\lambda_2 x} + c + \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} + \frac{x}{2}$$

A5: Fläche und Volumen

a) Gegeben sind die beiden Funktionen

$$y_1(x) = x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$$
$$y_2(x) = 3x + 1$$

Die Schnittpunkte der Parabel und der Geraden sind offensichtlich $x = 0$ und $x = 1$. Wir berechnen also

$$\int_0^1 \mathrm{d}x\,[y_2(x) - y_1(x)] = \int_0^1 \mathrm{d}x\,[x - x^2] = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

Für den Schwerpunkt schreiben wir

$$\mathbf{s} = \frac{1}{A} \int_0^1 \mathrm{d}x \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \mathrm{d}y \, \mathbf{r}$$

Damit ist

$$s_x = \frac{1}{A} \int_0^1 \mathrm{d}x \, x(x - x^2) = 6 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{2}$$

und

$$\begin{aligned} s_y &= \frac{1}{A} \int_0^1 \mathrm{d}x \, \frac{1}{2} \left[y_2(x)^2 - y_1(x)^2 \right] = \frac{1}{2A} \int_0^1 \mathrm{d}x \, \left[(3x+1)^2 - (x+1)^4 \right] \\ &= 3 \left(\frac{1}{9}(3x+1)^3 - \frac{1}{5}(x+1)^5 \right) \Bigg|_0^1 = 3 \left(\frac{63}{9} - \frac{31}{5} \right) = \frac{12}{5} \end{aligned}$$

b) Wir schreiben die Gleichung der Fläche um zu:

$$z = 1 - x^2 - y^2$$

Wir können das Volumen für ähnliche Flächen der Form $z = g(r)$ mit $r^2 = x^2 + y^2$ in Zylinderkoordinaten wie folgt ausrechnen:

$$V = 2\pi \int_0^1 \mathrm{d}r \, r \int_0^{g(r)} \mathrm{d}z \; = 2\pi \int_0^1 \mathrm{d}r \, r g(r)$$

Hier erhalten wir

$$V = 2\pi \int_0^1 \mathrm{d}r \, r(1 - r^2) = \frac{\pi}{2}$$