Mathematische Methoden der Physik, (Repetitionsübung)

Prof. Hans Peter Büchler WS 2014/15, 18. Dezember 2014

Repetitionsaufgaben mit Beispielen möglicher Prüfungsaufgaben. Diese Aufgaben zählen nicht zu den Scheinkriterien sondern sind als Prüfungsvorbereitung gedacht. Wer zusätzliche Punkte für den Übungsschein sammeln möchte kann die Aufgaben aber in der Woche 12-16 Januar in der Übungsstunde abgeben.

1. Differenzialrechnung und Integralrechnung

(a) Berechne folgende Ableitungen

$$\frac{d}{dx}\exp(-x^2/4), \qquad \frac{d}{dx}\ln\left[\sinh(xe^x+1)\right] \qquad \frac{d}{dx}\left(\int_0^x dy\,\exp(-xy)\right) \tag{1}$$

(b) Berechne als nächstes folgende bestimmten Integrale

$$\int_0^1 dx\, x^{1/2} \qquad \int_{-\infty}^0 dx\, x\exp(-x^2) \qquad \int_{-1}^1 dx\sqrt{1-x^2} \tag{2}$$

(c) Das Volumen V sei gegeben durch einen Zylinder entlang der z-Achse mit Radius $R = 1$ und $0 \leq z \leq 1$. Berechne das Volumen Integral

$$\int_V d\mathbf{r}\,\frac{z^2}{1+x^2+y^2} \tag{3}$$

2. Getriebenes freies Teilchen

(a) Betrachte die Newtonsche Bewegungsgleichung des freien Teilchens mit der Masse m

$$m\ddot{x}(t) = 0. \tag{4}$$

Berechne die allgemeine Lösung $x(t)$ dieser homogenen Differentialgleichung.

(b) Nun wird eine periodische Kraft angelegt

$$\ddot{x}(t) = F_0\sin(\omega t). \tag{5}$$

Man berechne eine partikuläre Lösung $x_p(t)$ dieser Gleichung, und bestimme die Lösung der Gleichung mit den Anfangsbedingungen $x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0$.

(c) Betracht nun den Fall mit einer starke Reibungskraft die auf das Teilchen wirkt. Löse daher die Diffentialgleichung

$$m\ddot{x}(t) + \eta[\dot{x}(t)]^2 = 0. \tag{6}$$

Zur Zeit $t = 0$ startet das Teilchen mit einer endlichen Geschwindigkeit $\dot{x}(0) = v$ und $x(0) = 0$. [Tip: Betrachte zuerst die Differentialgleichung für $y = \dot{x}(t)$].

3. Differential- und Integralrechnung II

(a) Berechne folgende unbestimmte Integrale

$$\int dx\,(2{-}3x)^4, \quad \int dx\,3x^2 e^{x^3}, \quad \int dx\,2x\cot x^2 \quad \int dx\,e^x \sin x, \quad \int dx\,\frac{\cos^3 x}{1-\sin x}$$

(b) Berechne die totale Ableitung

$$\frac{d}{d\lambda}\int_0^\lambda dx \frac{e^{-\lambda x^2}-1}{x}, \tag{7}$$

Hinweis: Benutze die Kettenregel für partielle Ableitungen. Das Integral nach der Ableitung kann berechnet werde.

4. Gewöhnliche Differentialgleichung

(a) Bestimme die allgemeine (komplexe) Lösung der homogenen Differentialgleichung

$$\left[\frac{d^3}{dx^3}+2\frac{d^2}{dx^2}+2\frac{d}{dx}\right]y(x)=0, \quad x\in\mathbb{R}. \tag{8}$$

(b) Finde eine Lösung, die die Anfangsbedingungen $y(0)=2$, $y'(0)=-2$ und $y''(0)=0$ erfüllt. Gib eine Darstellung der Lösung an, in der außer der reellen Exponentialfunktion nur trigonometrische Funktionen vorkommen.

(c) Finde nun eine (andere) Lösung zu den Bedingungen $y(0)=2$, $y'(0)=-1+i$, $y(\pi)=1-e^{-\pi}$. Wähle eine Form der Lösung in der außer Konstanten ausschließlich die komplexe Exponentialfunktion vorkommt. Skizziere qualitativ, wie die hier gefundene Lösung $y(x)$ von $x=0$ bis $x\to\infty$ in der komplexen Ebene verläuft.

(d) Betrachte nun die inhomogene Differentialgleichung

$$\left[\frac{d^3}{dx^3}+2\frac{d^2}{dx^2}+2\frac{d}{dx}\right]y(x)=x^2. \tag{9}$$

Gib ihre allgemeine (komplexe) Lösung an.

5. Fläche und Volumen

(a) Berechne den Flächeninhalt A der Fläche, die von den Funktionen

$$y_1(x)=x^2+2x+1, \tag{10}$$
$$y_2(x)=3x+1 \tag{11}$$

eingeschlossen wird. Bestimme die x- und die y-Komponente des Schwerpunkts durch die Integrale

$$s_x=\frac{1}{A}\int_A dx\,dy\,x, \qquad s_y=\frac{1}{A}\int_A dx\,dy\,y. \tag{12}$$

(b) Berechne das Volumen, das von der $z=0$-Ebene (x-y-Ebene) und der Fläche $x^2+y^2+z=1$ eingeschlossen wird.