Mathematische Methoden der Physik, (Repetitionsübung II)

Prof. Hans Peter Büchler WS 2014/15, 11. Februar 2015

1. Differenzialrechnung und Integralrechnung

(a) Berechne die Ableitungen

$$\frac{d}{dx}\exp(-x^6/2) \qquad \frac{d}{dx}\ln\left(1+x^2\right) \qquad \frac{d}{dx}e^x \sin x \qquad \frac{d}{dx}\left(\int_1^x dt\, x^2 t\right) \tag{1}$$

(b) Berechne die bestimmten Integrale

$$\int_0^\pi dx\, \sin x \qquad \int_0^2 dx\, 2xe^{x^2} \qquad \int_0^1 dx\, xe^x \tag{2}$$

(c) Berechne die drei-dimensionalen Integrale

$$\int_K d\mathbf{r}\, xyz, \qquad \int_K d\mathbf{r} z^2 \tag{3}$$

wobei K die Einheitskugel ist.

(d) Fläche A sei gegeben durch die Oberfläche der Kugel mit Radius $R = 1$. Berechne das Oberflächenintegral

$$\int_A dS\left(1 - 3z^2\right) \tag{4}$$

(e) Das Volumen V sei gegeben durch einen Zylinder entlang der z-Achse mit Radius $R = 1$ und $0 \leq z \leq 1$. Berechne das Volumen Integral

$$\int_V d\mathbf{r}\, \frac{z^2}{1 + x^2 + y^2} \tag{5}$$

2. Gewöhnliche Differentialgleichungen

Gegeben sei folgende Differentialgleichung

$$y'' + ay' + 4y = 0, \tag{6}$$

mit dem reellen Parameter a.

(a) Lösen Sie die Differentialgleichung und geben Sie an für welche Werte von a oszillierende Lösungen und für welche Werte von a rein exponentiel ansteigende bzw abfallende Lösungen existieren.

(b) Kann man a so wählen, dass $y(x) = \sin 2x$ eine Lösung der Differentialgleichung ist? Falls ja, gebe man den Wert von a an.

(c) Man gebe auch für den Fall der Entartung, bei der die zwei Lösungen der charakteristischen Gleichung zusammen fallen, zwei unabhängige Lösungen an.

(d) Lösen Sie die Gleichung

$$y' - \frac{y^2}{x^2} = 0. \tag{7}$$

Bestimme die Integrationskonstante so dass $y(x) \to 1$ für $x \to \infty$.

3. Vektoranalysis

(a) Betrachte das Skalarfeld $\psi(\mathbf{r}) = \cos(x)y$ und das Vektorfeld $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = x^2y^2\mathbf{e}_x - xz^2\mathbf{e}_y + xyz^2\mathbf{e}_z$. Berechne für diese Felder folgende Größen

$$\nabla\psi(\mathbf{r}), \quad \Delta\psi(\mathbf{r}), \quad \mathrm{div}\mathbf{A}(\mathbf{r}), \quad \mathrm{rot}\mathbf{A}(\mathbf{r}).$$

(b) Für den Rest der Aufgabe betrachten wir ein Skalarfeld, das durch zwei Punktladungen bei $\mathbf{r} = 0$ und $\mathbf{r} = \mathbf{a} = (0, 0, a)$ erzeugt wird. Ein solches Skalarfeld ist gegeben durch

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{|\mathbf{r}|} + \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{a}|}.$$

Berechne für dieses Skalarfeld den Gradienten $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \nabla\phi(\mathbf{r})$.

(c) Zeige, dass $\Delta\frac{1}{|\mathbf{r}|}$ für $\mathbf{r} \neq 0$ verschwindet. Welche Konsequenz hat das für $\Delta\phi(\mathbf{r})$? Warum ist $\Delta\phi(\mathbf{r})$ für $\mathbf{r} = 0$ und $\mathbf{r} = \mathbf{a}$ nicht definiert?

4. Fourierreihen

(a) Berechne die Fourierreihe und die Fourierkoeffizienten der Funktion

$$f(x) = \exp(x), \qquad 0 < x < 2\pi. \tag{8}$$

(b) Für die periodische Funktion $g(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{g}(n)\exp(ik_nx)$ seien die Fourierkoeffizienten $\hat{g}(n)$ bekannt. Bestimme daraus die Fourierkoeffizienten der Funktion $h(x) = g(x)\cos(2\pi x/L)$.