Mathematische Methoden der Physik, Übung 10

Prof. Hans Peter Büchler WS 2014/15, 17. Dezember 2014

1. Trägheitsmomente (Schriftlich)

Die kinetische Energie eines Rotierenden dreidimensionalen Körpers um die Rotations Achse $\boldsymbol{\omega} = (\omega^1, \omega^2, \omega^3)$ mit der Rotationsgeschwindigkeit $|\boldsymbol{\omega}|$ ist gegeben durch den Trägheitsmomentum Tensor

$$T = \sum_{\nu=1}^{3} \sum_{\mu=1}^{3} I_{\nu\mu} \omega^{\nu} \omega^{\mu}. \tag{1}$$

Der Trägheitstensor ist gegeben durch

$$I_{\nu\mu} = \int_V d\mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) \left[\delta_{\nu\mu} \mathbf{r}^2 - r_\nu r_\mu \right], \tag{2}$$

wobei ρ die Massendichte des Körpers ist. Im Falle von homogener Massenverteilung ist $\rho = M/V$ mit M der Masse und V das Volumen des Körper. Im folgenden sollen die Trägheitsmomente für ein paar spezielle dreidimensionale Körper berechnet werden. Dabei soll zuerst das Volumen des Körpers mittels

$$V = \int_V d\mathbf{r}\, 1 \tag{3}$$

berechnet werden, und die Massendichte durch die gesamt Masse M ersetzt werden. Im allgemeinen hat der Trägheitstensor 9 Momente. Durch Ausnutzen der Symmetrien der Körper reduziert sich das Berechnen jedoch auf wenige Elemente.

(a) Berechne den Trägheitstensor für einen dreidimensionalen Würfel mit der Kantenlänge L.

(b) Berechne den Trägheitstensor für eine Kugel mit Radius R. (Tip: Benutze Kugelkoordinaten).

(c) Für eine Ellipse die mittels der Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1. \tag{4}$$

definiert ist.
(Tip: Führe die Koordinaten Transformation $x = au$, $y = bv$, und $z = cw$ durch, und rechne anschliessend mittels Kugelkoordinaten.)

(d) Für einen Zylinder der Höhe L und Radius R.
(Tip: Berechne die Integration in x und y in Polarkoordinaten.)

2. Fourierreihen (Schriftlich)

(a) Betrachte folgende Funktion definiert auf dem Bereich $0 \leq x < 2\pi$.

$$f_1(x) = \exp(x), \qquad f_2(x) = x^2, \qquad f_3(x) = \delta(x)$$

Ausserhalb dieses Bereiches sind die Funktionen periodisch fortgesetzt. Berechne die Fourierreihe und die Fourierkoeffizienten dieser Funktionen.

(b) Für die periodische Funktion $g(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{g}(n) \exp(ik_n x)$ seien die Fourierkoeffizienten $\hat{g}(n)$ bekannt. Bestimme daraus die Fourierkoeffizienten der Funktion $h(x) = g(x)\sin(2\pi x/L)$.

3. Gravitationspotential (Übungstunde)

(a) Berechne mittels Kugelkoordinaten das Integral

$$\int_V dxdydz \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{\nu/2}} \tag{5}$$

mit V die Kugel mit Radius R. Für welche Werte von ν ist das Integral konvergent und vergleiche das Resultat mit der Lösung aus Aufgabe 3 der Übungsserie 3.

(b) Betrachte die Funktion

$$V(x,y,z) = \frac{mMG}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{mMG}{r}. \tag{6}$$

Diese Funktion beschreibt das Coulomb Potential. Zeige, dass der Vektor definiert mittels der Partiellen Ableitungen

$$\mathbf{F} = -\begin{pmatrix} \partial_x V \\ \partial_y V \\ \partial_z V \end{pmatrix} \tag{7}$$

gerade die Gravitationskraft zwischen zwei Massenpunkten m und M im Abstand r ergibt.

(c) Berechne nun mittels den Kugelkoordinaten das Integral

$$W_{\text{Kugel}}(a) = \frac{1}{V_{\text{Kugel}}} \int_V dxdydz V(x,y,z-a). \tag{8}$$

Daraus erhalten wir die Gravitationskraft zwischen einer homogenen Kugel mit Radius R und Masse M und einem Massepunkt mit Abstand a zum Zentrum der Kugel mittels Ableitung nach: $F = \partial_a W(a)$. Zeige, dass das Ergebnis identisch ist zum Resultat für einen Massepunkt der Masse M

$$W_{\text{Punkt}}(a) = \int dxdydz V(\mathbf{r})\delta(\mathbf{r} - a\mathbf{e}_z). \tag{9}$$