Mathematische Methoden der Physik, Übung 11

Prof. Hans Peter Büchler WS 14/15, 7. Januar 2015

1. Satz von Parseval (Schriftlich)

Berechne die Fourierreihe der Funktion

$$f(x) = \mathrm{sgn}(x) \qquad \text{für} \quad -L/2 < x < L/2, \tag{1}$$

d.h., $f(x) = -1$ für $-L/2 < x < 0$ und $f(x) = 1$ für $0 < x < L/2$. Wende jetzt den Satz von Parseval an, der besagt, dass für eine periodische Funktion gilt

$$\int_{-L/2}^{L/2} |f(x)|^2 = \sum_n |\hat{f}(k_n)|^2 \tag{2}$$

mit $\hat{f}(k_n)$ die Fourier Reihe. Zeige somit, dass folgende Beziehung gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}. \tag{3}$$

2. Poisson Summe (Schriftlich)

Es sei$f(x)$ eine Funktion auf $\mathbf{R}$ mit der Fouriertransformierten $\hat{f}(k)$. Es sei jetzt mit $x_n = nL$ ein Gitter definiert. Zeige, dass folgende Gleichung, die sogenannt Poisson Summe, gilt

$$\sum_n f(x_n) = \frac{1}{L} \sum_n \hat{f}(k_n) \tag{4}$$

wobei $k_n = 2\pi/Ln$ das sogenannte Reziproke Gitter definiert. Berechne mit Hilfe dieser Formel die Summe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^2 + n^2}. \tag{5}$$

Tip: Betrachte die Fouriertransformierte von $\exp(-a|x|)$.

3. Fouriertransformation (Übungstunde)

(a) Betrachte eine Funktion $f(x)$ mit der Fouriertransformierten Funktion $\hat{f}(k)$. Berechne jetzt die Fouriertransformation von

$$f(x+a), \qquad\qquad f(x)\exp(iqx). \tag{6}$$

(b) Berechne die Fouriertransformierte von

$$f(x) = \sin(ax)\exp(-x^2) \tag{7}$$

(c) Berechne die Fouriertransformierte von

$$f(x) = x\exp(-\epsilon x^2). \tag{8}$$

Wie sieht der Limes $\epsilon \to 0$ aus?

(d)* Berechne die Fouriertransformierte von

$$f(x) = \frac{1}{\cosh(x)} \tag{9}$$