Mathematische Methoden der Physik, Übung 12

Prof. Hans Peter Büchler WS 14/15, 14. Januar 2015

1. Fouriertransformationen in 3 Dimensionen (Schriftlich)

(a) Betrachte die Funktion

$$f(\mathbf{r}) = \exp\left(-|\mathbf{r}|^2/a^2\right) \tag{1}$$

in 3 Raumdimensionen und bestimme die Fouriertransformierte $\hat{f}(\mathbf{k})$.

(b)* Zeige, dass für eine rotationsinvariante Funktion $f(\mathbf{r})$ die Fouriertransformierte $\hat{f}(\mathbf{k})$ ebenfalls Rotationsinvariant ist. Rotationsinvarinant heisst, dass für eine beliebige Rotation $\bar{\mathbf{R}}$ gilt

$$f(\bar{\mathbf{R}}\mathbf{r}) = f(\mathbf{r}). \tag{2}$$

Tip: Benutze, dass für Rotationen gilt $\bar{\mathbf{R}}\mathbf{r} \cdot \bar{\mathbf{R}}\mathbf{k} = \mathbf{r} \cdot \mathbf{k}$.

(c) Berechne die Fouriertransformierte der Funktion $f(\mathbf{r}) = 1/|\mathbf{r}|^2$ in 3 Raumdimensionen.

2. Fouriertransformationen und Differentialgleichungen (Schriftlich)

(a) Berechne die Fouriertransformierte der folgenden Differentialgleichung

$$\left[\frac{d}{dx} - a\frac{d^3}{dx^3}\right] y(x) = xy(x). \tag{3}$$

Wie sieht die Differentialgleichung im Fourierraum aus und ist sie einfacher zu lösen?

(b) Berechne die Fouriertransformierte einer Differentialgleichung mit einem nicht-lokalen Term

$$\frac{d^2}{dx^2}y(x) - \int_{-\infty}^{\infty} dz h(x-z)y(z) = \delta(x) \tag{4}$$

mit

$$h(x) = \begin{cases} \exp(-x) & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}. \tag{5}$$

Berechne eine Lösung der Differentialgleichung $\hat{y}(k)$ im Fourierraum. Wie erhält man die Lösung $y(x)$ im Ortsraum?

3. Fouriertransformationen (Übungsstunde)

(a) Berechne die Fouriertransformierte der Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 1 & |x| \leq 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases} \tag{6}$$

(b) Benutze jetzt die algemeine Eigenschaft, dass die Funktion $f(x)$ geschrieben werden kann als $f(x) = \int dk \hat{f}(k) e^{ikx}$ mit dem Resultat aus (a) um den Wert des folgenden Integrals zu berechnen:

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \, \frac{\sin \lambda}{\lambda} \tag{7}$$

(c) Benutze jetzt den Satz von Parseval mit der Funktion $f(x)$ aus (a) um den Wert des Integrals

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \, \frac{\sin^2 \lambda}{\lambda^2} \tag{8}$$

zu bestimmen.