Mathematische Methoden der Physik, Übung 13

Prof. Hans Peter Büchler WS 14/15, 21. Januar 2015

1. Zylinderkoordinaten (Schriftlich)

(a) Betrachte die Zylinderkoordinaten

$$\mathbf{r}(r,\phi,z) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\phi \\ r\sin\phi \\ z \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Zeichne in der (r,ϕ)-Ebene und in der (x,y)-Ebene die Linien bestimmt für fixes $r = 1,2,3$ und $\phi = 0, \pi/4, \pi/2$. Berechne die partielle Ableitungen $\mathbf{e}_r = \partial_r \mathbf{r}$, $\mathbf{e}_\phi = \partial_\phi \mathbf{r}$, und $\mathbf{e}_z = \partial_z \mathbf{r}$, und zeige dass diese Vektoren in jedem Punkt senkrecht aufeinander stehen und berechne ihren Betrag.

(b) Berechne das Oberflächen Integral

$$\int_S dS z^2 \qquad \int_S d\mathbf{S} \wedge \mathbf{r} \tag{2}$$

für einen Zylinder beschrieben mittels $r = 1$ und $0 < z < 1$.

2. Linien Integrale (Schriftlich)

Betrachte die parabelförmige Linie

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

mit $t \in [0,1]$. Berechne nun folgende Linien Integrale entlang dieser Kurve

$$I = \int_C d\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}, \qquad \mathbf{I} = \int_C d\mathbf{r} xy, \qquad L = \int_C ds \frac{1}{\sqrt{1+4x^2}}, \qquad L = \int_C ds \tag{4}$$

3. Kugel Oberfäche (Übungstunde)

Die Oberfäche einer Kugel mit Radius R is Parametrisiert mittels (Vergleiche mit den Kugelkoordinaten)

$$\mathbf{r}(\phi, \theta) = \begin{pmatrix} R\cos\phi\sin\theta \\ R\sin\phi\sin\theta \\ R\cos\theta \end{pmatrix}. \tag{5}$$

(a) Berechne die Oberfäche der Kugel mit Hilfe der Formel zur Berechnung von Flächen.

(b) Berechne das Oberflächen Integral über die Kugel

$$\int_S d\mathbf{S} \cdot \mathbf{F} \tag{6}$$

mit dem Vektorfeld $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{r}/|\mathbf{r}|^3$. Zeige, dass der Wert des Obeflächen Integrales unabhängig vom Radius R der Kugel ist.