Mathematische Methoden der Physik, Übung 14

Prof. Hans Peter Büchler WS 14/15, 28. Januar 2015

1. Beispiele zur Divergenz und zur Rotation (Schriftlich)

(a) Gehe vom Potential $V(r) = \frac{1}{4}r^2 = \frac{1}{4}|\boldsymbol{r}|^2 = \frac{1}{4}(x^2 + y^2 + z^2)$ aus und bilde daraus den Kraftvektor $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = -\nabla V(r)$. Skizziere das Vektorfeld $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ in der x-y-Ebene ($z = 0$). Berechne explizit die Divergenz und die Rotation von $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$.

(b) Betrachte nun ein allgemeines, nur vom Betrag $r = |\boldsymbol{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ abhängiges Potential $V(r)$. Zeige, dass die Divergenz des zugehörigen Kraftvektors

$$\nabla \cdot \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = \frac{d^2V}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dV}{dr}$$

beträgt.

(c) Skizziere das Vektorfeld

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \begin{pmatrix} x + y \\ -x \\ 0 \end{pmatrix}$$

in der x-y-Ebene. Berechne die Divergenz und die Rotation von $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$.

2. Rechenregeln für Differentialoperatoren (Schriftlich)

Beweise die folgenden Relationen, die in der Vorlesung angegeben wurden, wobei $\phi = \phi(\boldsymbol{r})$ eine von $\boldsymbol{r}$ abhängige skalare Funktion sowie $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ und $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$ Vektorfelder sind.

(a) $\nabla \cdot (\phi \boldsymbol{A}) = (\nabla \phi) \cdot \boldsymbol{A} + \phi(\nabla \cdot \boldsymbol{A})$

(b) $\nabla \times (\phi \boldsymbol{A}) = (\nabla \phi) \times \boldsymbol{A} + \phi(\nabla \times \boldsymbol{A})$

(c) $\nabla \cdot (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{B} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{A}) - \boldsymbol{A} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{B})$

(d) $\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{A}) = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{A}) - \Delta \boldsymbol{A}$

Anleitung: Rechne die Terme für die Komponenten der dreidimensionalen Vektoren aus.

3. Beispiele aus der Elektrodynamik (Übungstunde)

In der Elektrodynamik lassen sich die elektrische Feldstärke $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t)$ und die magnetische Flussdichte $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t)$ aus einem skalaren Potential $\phi(\boldsymbol{r}, t)$ und einem Vektorpotential $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t)$ gewinnen durch:

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) = -\nabla \phi(\boldsymbol{r}, t) - \frac{d}{dt}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t)$$

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t) = \nabla \times \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t)$$

(a) Ein statischer (keine Zeitabhängigkeit) elektrischer Dipol lässt sich durch das skalare Potential

$$\phi(\boldsymbol{r}) = \frac{\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

mit $r = |\boldsymbol{r}|$ und $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}$ beschreiben. Dabei ist $\boldsymbol{p}$ unabhängig von $\boldsymbol{r}$. Gib das zugehörige elektrische Feld $\boldsymbol{E}$ an.

(b) Ein statischer magnetischer Dipol lässt sich durch das Vektorpotential

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{r}}{r^3}$$

und $\phi = 0$ ausdrücken. Dabei ist $\boldsymbol{m}$ unabhängig von $\boldsymbol{r}$. Berechne die magnetische Flussdichte $\boldsymbol{B}$.

(c) Im Vakuum lässt sich für das Vektorpotential die Wellengleichung

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial t^2} - \Delta \boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}$$

mit der Lichtgeschwindigkeit c aufstellen. Zeige, dass

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t) = \boldsymbol{A}_0 \exp(\mathrm{i}(\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r} - \omega t))$$

für $|\boldsymbol{k}| = \omega/c$ eine Lösung der Wellengleichung ist. Gib für diesen Fall $\boldsymbol{E}$ und $\boldsymbol{B}$ an, wobei $\boldsymbol{A}_0$, $\boldsymbol{k}$, und ω weder von $\boldsymbol{r}$ noch von t abhängen. Welchen Winkel schließen $\boldsymbol{E}$ und $\boldsymbol{B}$ ein?