Mathematische Methoden der Physik, Übung 15

Prof. Hans Peter Büchler WS 14/15, 4 Februar 2015

1. ∇ und Δ in Kugel- und Zylinderkoordinaten (Übungsstunde)

(a) Folgende Funktionen sind in Zylinderkoordinaten (r, φ, z) gegeben. Berechne jeweils den Gradienten ∇f und Δf in Zylinderkoordinaten.

$$f_1 = ar^2 + bz^2, \qquad f_2 = \frac{a}{r}, \qquad f_3 = \frac{\cos\varphi}{r}$$

(b) Folgende Funktionen sind in Kugelkoordinaten (r, φ, ϑ) gegeben. Berechne jeweils den Gradienten ∇f und Δf in Kugelkoordinaten.

$$f_5 = \frac{a}{r}, \qquad f_6 = a\frac{e^{-br}}{r}, \qquad f_7 = \frac{z}{r^3} = \frac{\cos\vartheta}{r^2}$$

2. Divergenz und Rotation in krummlinigen Koordinaten (Übungsstunde)

In der Vorlesung wurde behandelt, wie Differentialoperatoren in krummlinige Koordinaten transformiert werden können sowie die Transformationsregeln für Zylinder- und Kugelkoordinaten.

Bestimme die Differentialoperatoren für die Divergenz und Rotation in Kugelkoordinaten.

3. Semiparabolische Koordinaten (Übungstunde)

Wir betrachten in dieser Aufgabe als weiteres Beispiel für ein Koordinatensystem die semiparabolischen Koordinaten $(u_1, u_2, u_3) = (\mu, \nu, \varphi)$. Ihre Umrechnung in kartesische Koordinaten lautet:

$$x = \mu\nu\cos\varphi, \tag{1}$$

$$y = \mu\nu\sin\varphi, \tag{2}$$

$$z = \frac{1}{2}(\mu^2 - \nu^2). \tag{3}$$

Dabei gilt $\mu \geq 0$ und $\nu \geq 0$.

(a) Berechne die Vektoren $\boldsymbol{v}_i = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_i}$, ihre Beträge $h_i = |\boldsymbol{v}_i|$ sowie die Basisvektoren $\boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{v}_i/h_i$.

(b) Bestimme den Gradienten in semiparabolischen Koordinaten und zeige, dass sich der Laplace-Operator in der Form

$$\Delta f = \frac{1}{\mu^2 + \nu^2}\left[\frac{\partial^2}{\partial\mu^2} + \frac{1}{\mu}\frac{\partial}{\partial\mu} + \frac{\partial^2}{\partial\nu^2} + \frac{1}{\nu}\frac{\partial}{\partial\nu} + \left(\frac{1}{\mu^2} + \frac{1}{\nu^2}\right)\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right] f \tag{4}$$

darstellen lässt.

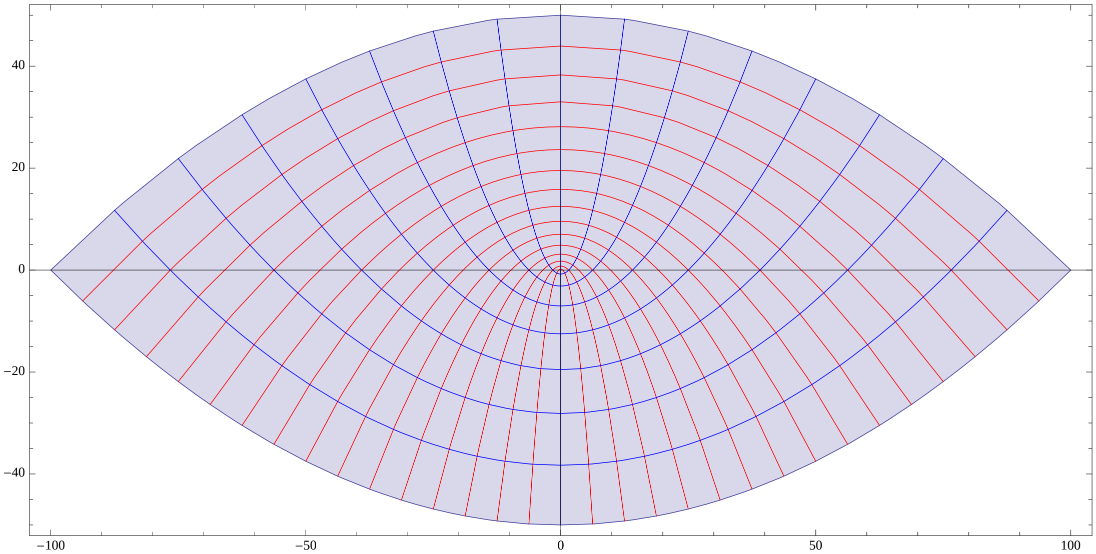

Abbildung 1: llustration der semiparabolischen Koordinaten entlang der x-z Ebene.

(c) Transformiere die Funktion

$$f = \sqrt{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} + z} \tag{5}$$

in semiparabolische Koordinaten. Berechne Δf in semiparabolischen Koordinaten und transformiere das Ergebnis wieder in kartesische Koordinaten.