Mathematische Methoden der Physik, Übung 2

Prof. Hans Peter Büchler WS 2014/15, 22. Oktober 2014

1. Elementare Integrale (Schriftlich)

(a) Berechne folgende elementare Integrale mit Hilfe der Integrationsregeln aus der Vorlesung

$$\int dx \frac{1}{1-x}, \qquad \int dx x\cos(x), \qquad \int dx \frac{\cos(x)}{\sin(x)}, \qquad \int dx \frac{f'(x)}{f(x)} \tag{1}$$

(b) Berechne folgende bestimmte Integrale

$$\int_0^2 dx \frac{1}{x^3} \qquad \int_0^\pi dx \sin(x), \qquad \int_0^{2\pi} dx \sin^2(x), \qquad \int_0^\infty dx\, x \exp(-x^2/a) \tag{2}$$

(c) Benutze die Relation $1/(1-x^2) = 1/(1+x) + 1/(1-x)$ um folgendes Integral zu berechnen

$$\int dx \frac{1}{1-x^2} \tag{3}$$

2. Gamma Funktion (Schriftlich)

(a) Die Gamma Funktion $\Gamma(\nu)$ ist definiert für alle $\nu > 0$ durch das Integral

$$\Gamma(\nu) = \int_0^\infty dx\, x^{\nu-1} \exp(-x). \tag{4}$$

Zeige mittels partieller Integration, dass die Gamma Funktion folgende Beziehung erfüllt

$$\Gamma(\nu+1) = \nu\Gamma(\nu) \tag{5}$$

(b) Berechne den Wert $\Gamma(1)$ und zeige, dass für naturliche Zahlen gilt

$$\Gamma(n+1) = n!, \tag{6}$$

d.h., die Gamma Funktion ist eine differenzierbare Erweiterung der Fakultät.

(c) Zeige durch Substitution, dass

$$\int_{-\infty}^\infty dx \exp(-x^2) = \Gamma(1/2). \tag{7}$$

(d) Verifiziere die folgende Gleichung (Hinweis: $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$)

$$F(\lambda) = \int_{-\infty}^\infty dx \exp\left(-\lambda x^2\right) = \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}. \tag{8}$$

Berechne nun mittels Ableiten der Funktion $F(\lambda)$ nach λ die Integrale

$$\int_{-\infty}^\infty dx x^2 \exp\left(-x^2\right), \qquad \int_{-\infty}^\infty dx x^4 \exp\left(-x^2\right). \tag{9}$$

(e) Berechne, die Integrale aus (d) nun direkt durch das Umschreiben auf die Gamma Funktion, und zeige, dass es dasselbe Resultat ergibt.

3. Konvergenz von Integralen. (Übungstunde)

Berechne die Stammfunktion von

$$\int dx \frac{1}{x^\nu} \tag{10}$$

mit ν eine reele Zahl. Untersuch nun für welche Werte von ν folgende Intetrale konvergieren

(a)

$$\int_0^1 dx \frac{1}{x^\nu} = \lim_{a \to 0} \int_a^1 dx \frac{1}{x^\nu} \tag{11}$$

(b)

$$\int_1^\infty dx \frac{1}{x^\nu} = \lim_{b \to \infty} \int_1^b dx \frac{1}{x^\nu} \tag{12}$$

(c) Untersuche nun die Konveregenz von folgenden Integralen

$$\int_0^\infty dx \frac{1}{1+x^3} \qquad \int_0^\infty dx \frac{1}{x} \qquad \int_0^\infty \frac{\sqrt{1+x^2}}{x(1+x^2)} \qquad \int_0^\infty dx \frac{\sin^2(x)}{x^2} \qquad \int_0^\infty dx \frac{x^3-1}{\sqrt{1+x^8}}$$

Tipp: Untersuche das Verhalten des Integrandes für $x \to 0$ und $x \to \infty$ und benutze das Resultat aus (a) und (b).
(Freiwillig: Falls das Integral konvergiert berechne seinen Wert mit allen möglichen Hilfsmittel wie Computer Programme (Mathematic/Maple) oder den Integral Tabellen "Table of Integrals, Series, and Products" von Gradshteyn/Ryzhik.)