Mathematische Methoden der Physik, Übung 3

Prof. Hans Peter Büchler WS 2014/15, 29. Oktober 2014

1. Komplexe Zahlen (Schriftlich)

(a) Vereinfache die folgenden komplexen Zahlen und schreibe sie in den Darstellungen $x + iy$ sowie $re^{i\varphi}$:

$$z_1 = i^4, \quad z_2 = i^2 + 2i + 1, \quad z_3 = \frac{1}{1+i}, \quad z_4 = \frac{3+i}{2+i},$$
$$z_5 = 3(\cos(\pi/6) + i\sin(\pi/6))$$

Trage die Zahlen als Punkte in einem gemeinsamen Diagramm in die komplexe Ebene ein.

(b) Bringe folgende komplexe Zahlen auf eine möglichst einfache Form:

$$\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^4, \quad (1-i)^8, \quad \left(\frac{7+3i}{\sqrt{50}i+\sqrt{8}}\right)^{56}$$

(c) Bringe die folgenden Ausdrücke mit der komplexen Zahl $z = a + ib$ auf die Form $x + iy$, d.h. bestimme $x = x(a,b)$ und $y = y(a,b)$:

$$\frac{1}{z^2}, \quad \frac{z}{\bar{z}}, \quad \frac{1+z}{1-z}, \quad \frac{1}{z-i}$$

(c) Beschreibe mit einer Skizze die Menge der Punkte in der komplexen Ebene, die folgende Gleichungen oder Ungleichungen mit der komplexen Zahl z erfüllen:

$$\mathrm{Re}(z) \geq 2, \quad \mathrm{Re}(z^2) = 4, \quad |z| = 2, \quad |z-1| < 1, \quad z^2 = -\bar{z}^2$$

2. Komplexe Zahlen (Schriftlich)

(a) Gegeben sei die komplexe Zahl

$$z = \frac{(-2+2i)^7}{\left(1+\sqrt{3}i\right)^5}. \tag{1}$$

Man berechne z mit Hilfe von Polarkoordinaten in der Form $z = r\,(\cos\phi + i\sin\phi)$.

(b) Berechne

$$\mathrm{Re}(\exp 2iz),\ \mathrm{Im}(\cosh^2 z),\ (-1+\sqrt{3}i)^{1/2},\ |\exp(i^{1/2})|,\ \exp(i^3),\ \mathrm{Im}(2^{i+3}) \tag{2}$$

(c) Vereinfache

$$z + w,\ w - z,\ wz,\ \bar{z}w + \bar{w}z,\ w^2, \tag{3}$$

wobei $z = 3 + 4i$ und $w = 2 - i$ ist..

3. Winkelfunktionen (Übungsstunde)

Mit den Exponentialdarstellungen

$$\sin x = \frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right), \quad \cos x = \frac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right) \tag{4}$$

können Additionstheoreme für Winkelfunktionen elegant hergeleitet werden.

(a) Zeige

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \tag{5}$$

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y \tag{6}$$

$$\sin 3x = -4 \sin^3 x + 3 \sin x \tag{7}$$

(b) Berechne Real- und Imaginärteil von $\cos z$ und $\sin z$ für $z = x + iy$.

(d) Beweise

$$\cot(\pi/12) = 2 + \sqrt{3} \tag{8}$$

Tipp: Schreibe $\pi/12 = (\pi/3) - (\pi/4)$ und betrachte $\exp(i\pi/12)$.