Mathematische Methoden der Physik, Übung 4

Prof. Hans Peter Büchler WS 2014/15, 5. November 2014

1. Quadratische Gleichung (Schriftlich)

(a) Finde die Lösungen der quadratischen Gleichung

$$z^2 + bz + c = 0 \tag{1}$$

mit b und c reelen Zahlen. Zeige, dass immer zwei Lösungen dieser Gleichung im Raum der komplexen Zahlen gibt. (eine doppelte Nullstelle zählt ebenfalls als zwei Lösungen). In welchem Parameterbereich sind die Lösungen komplex.

(b) Finde die allgemeine Form der Lösungen mit b und c komplexe Zahlen.

2. Logarithmus (Schriftlich)

(a) Die komplexe Wurzelfunktion ist definiert mittels dem Logarithmus

$$\sqrt{z} = \exp\left(\frac{1}{2}\ln z\right) \tag{2}$$

Worin besteht der Unterschied zwischen der Funktion $f(z) = \sqrt{z}$ und $g(z) = e^{-i\pi/4}\sqrt{e^{i\pi/2}z}$. Wähle eine Schnitt für den Logarithmus und zeichne in der Komplexen Ebene die Bereiche ein, wo $f(z) = g(z)$ und die Bereiche wo $f(z) \neq g(z)$. Welche Beziehung erfüllt $f(z)$ und $g(z)$ in letzteren Bereich?

(b) Zeichne in der Komplexen Ebene den Schnitt folgender Funktion ein

$$f(z) = \sqrt{z-1}\, i\, \sqrt{-(z+1)}. \tag{3}$$

mit dem Standard Schnitt für den Logarithmus.

3. Differentialgleichungen 1. Ordnung (Übungsstunde)

Suche die Lösung zur folgenden Differentialgleichungen mittels der Tricks in der Vorlesung mit den entsprechenden Anfangsbedingungen

(a)

$$\frac{d}{dx}y(x) + x\, y(x) = 0 \qquad\qquad y(0) = 1 \tag{4}$$

(b)

$$\frac{d}{dx}y(x) + 2x\, y(x) = 4x \qquad\qquad y(0) = 1 \tag{5}$$

(c)

$$\frac{d}{dx}y(x) = x[y(x)]^2 \qquad\qquad y(0) = 1 \tag{6}$$

(d)
$$\frac{d}{dx}y(x) - e^{-y(x)}\sin(x) = 0 \qquad y(0) = 0 \tag{7}$$

Nachtrag vom letzten Übungsblatt

2 Komplexe Zahlen (Schriftlich)

(b) Berechne

$$\mathrm{Re}(\exp 2iz),\ \mathrm{Im}(\cosh^2 z),\ (-1+\sqrt{3}i)^{1/2},\ |\exp(i^{1/2})|,\ \exp(i^3),\ \mathrm{Im}(2^{i+3}) \tag{8}$$

3 Winkelfunktionen (Übungsstunde)

Mit den Exponentialdarstellungen

$$\sin x = \frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right), \quad \cos x = \frac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right) \tag{9}$$

können Additionstheoreme für Winkelfunktionen elegant hergeleitet werden.

(a) Zeigen Sie

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \tag{10}$$
$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y \tag{11}$$
$$\sin 3x = -4\sin^3 x + 3\sin x \tag{12}$$

(b) Berechnen Sie Real- und Imaginärteil von $\cos z$ und $\sin z$ für $z = x + iy$.

(c) Lösen Sie die Gleichung

$$y^3 - 6y + 1 = 0 \tag{13}$$

durch die Substitution $y = 2\sqrt{2}\sin x$ und Ausnutzung von [12]. Geben Sie numerische Zahlenwerte für die Lösungen y_1, y_2, y_3 an.

(d) Beweisen Sie, dass

$$\cot(\pi/12) = 2 + \sqrt{3} \tag{14}$$

gilt, indem Sie $\pi/12 = (\pi/3) - (\pi/4)$ schreiben und $\exp(i\pi/12)$ betrachten.