Mathematische Methoden der Physik, Übung 5

Prof. Hans Peter Büchler WS 2014/15, 12. November 2014

1. Spezialfälle von 1. Ordnung DG (Schriftlich)

(a) **Separierbare Gleichung:** Löse die Differentialgleichung

$$y(x)' = [y(x)]^{\nu} \exp(-x) \tag{1}$$

mit der Anfangsbedingung $y(0) = 1$ und ν eine reele Zahl. Für welchen Wert von ν müssen wir die Gleichung als Spezialfall behandeln? Skizziere das Verhalten der verschiedenen Lösungen für $x \geq 0$.

(b) **Separierbare Gleichung:** Für viele praktischen Anwendungen verhält sich der Luftwiderstand proportional zur Geschwindigkeit im Quadrat. Berechne daher den Geschwindigkeitsverlaufs eines Basejumpers der von einer Felswand springt.

(c) **Bernoulli Gleichung:** Eine Differentialgleichung der Form

$$y(x)' = a\,(x)\,y\,(x) + b\,(x)\,y(x)^{\nu}. \tag{2}$$

wird als Bernoulli'sche Differentialgleichung bezeichnet. Man kann diese wie folgt umschreiben,

$$\frac{y(x)'}{y(x)^{\nu}} = a(x)y(x)^{1-\nu} + b(x). \tag{3}$$

Mit der Subsitution $y(x)^{1-\nu} = v$ erhält man

$$v' = (1-\nu)a(x)v + (1-\nu)b(x), \tag{4}$$

was nun ebenfalls mit den in der Vorlesung behandelten Tricks lösbar ist.

Betrachte nun die folgende Differentialgleichung, welche von der Bernoulli Form ist:

$$\frac{d}{dx}y(x) + \frac{y}{x} = 2x^3\,y^4. \tag{5}$$

Bilde diese Differentialgleichung mittels der Substitution $v(x) = [y(x)]^{-3}$ auf eine Lineare Differentialgleichung (vgl. Lösungsansatz im Hinweis) ab und löse diese mit den Standard Tricks.

2. Besselsche Differentialgleichung (Schriftlich)

Die besselsche Differentialgleichung ist gegeben durch

$$x^2 y(x)'' + xy(x)' + (x^2 - \nu^2)y(x) = 0. \tag{6}$$

(a) Zeige durch explizites ausrechnen, dass die Funktionen

$$J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}}, \qquad Y_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}} \tag{7}$$

zwei Lösungen der Besselgleichung sind für $\nu = 1/2$.

(b) Die Funktionen $J_\nu(x)$ werden allgemeine Besselfunktionen gennant und sind Lösungen der Besselgleichung. Die Besselfunktionen können in analogy zur Exponentialfunktion mittels einer Potenzreihe beschrieben werden. Die Potenzreihe hat folgende Form

$$J_\nu(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\frac{x}{2})^{2n}}{\Gamma(\nu + n + 1) n!}$$

Zeige mittels einsetzen der Potenzreihe in die Besselgleichung, dass dies wirklich eine Lösung ist für beliebiges ν. (Hinweis: Benutze die Eigenschaft der Gamma Funktion $\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z)$).

(c)* Zeige die allgemeine Relation für $\nu > 0$

$$\frac{\nu}{x} J_\nu(x) = \frac{1}{2} \left[J_{\nu-1}(x) + J_{\nu+1}(x)\right].$$

Tipp: Es gibt zwei Möglichkeiten. Entweder elegant mittels der Differentialgleichung und überprüfen der Korrekten Anfangsbedingungen, oder direkt mit der Darstellung der Besselfunktion als Potenzreihe.

3. Gedämpfte Schwinungen (Übungstunde)

Betrachte die Differentialgleichung des gedämpften harmonischen Oszillators

$$m\ddot{x} + k\dot{x} + Dx = 0. \tag{8}$$

Leite eine quadratische Gleichung (die sog. charakteristische Gleichung) mit Hilfe des Lösungsansatzes $x = x_0 \exp(i\omega t)$ her und berechne davon die Lösungen. Wie hängt die Kreisfrequenz ω mit der Federkonstanten D zusammen? Unterscheide nun zwischen 3 Fällen, in denen sich das System ganz verschieden verhält.