Mathematische Methoden der Physik, Übung 6

Prof. Hans Peter Büchler WS 2014/15, 19. November 2014

1. Differentialgleichungen höherer Ordnung (Schriftlich)

(a) Bestimme die allgemeine Lösung folgender Differentialgleichungen

$$u''' - 3u'' + 4u' - 2u = 0. \tag{1}$$

(Tipp: Zeige zuerst, dass $\lambda = 1$ eine Lösung des Polynoms ist, und finde anschliessend die beiden weiteren Nullstellen.)

(b) (i) Zeige, dass sich die Differentialgleichung

$$ax^2 \frac{d^2}{dx^2} y(x) + bx \frac{d}{dx} y(x) + cy(x) = 0 \tag{2}$$

mit dem Ansatz $y = x^\nu$ lösen lässt. Bestimme ν in Abhängigkeit von a, b und c.

(ii) Welche Lösung von Gleichung (2) findet man im speziellen für $a = 1$, $b = 3$ und $c = 1$?

(iii) Substituiere in der Differentialgleichung (2) mit der Wahl der Konstanten aus (ii)

$$x = e^z, \qquad \text{woraus folgt} \quad x\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}, \quad x^2 \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dz^2} - \frac{dy}{dz}$$

und bestimme *zwei* Lösungen $y(z)$ der daraus resultierenden Differentialgleichung. Welche Lösungen $y(x)$ ergeben sich? Warum wird mit dem Vorgehen aus (i) und (ii) nur eine dieser Lösungen gefunden?

2. δ-Funktion (Schriftlich)

(a) Betrachte das Verhalten der folgenden Funktionen $f_1(x)$ und $f_2(x)$ für $\varepsilon \to 0$ und begründe, warum es plausibel erscheint, dass sie gegen die δ-Funktion konvergieren.

$$f_1(x) = \frac{\varepsilon/\pi}{x^2 + \varepsilon^2}, \qquad f_2(x) = \frac{\theta(x+\varepsilon) - \theta(x)}{\varepsilon} \quad \text{mit} \quad \theta(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}.$$

Berechne explizit

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)\, dx = 1, \quad \int_{-\infty}^{\infty} f_2(x)\, dx = 1.$$

(b) Zeige, dass gilt $\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x)$. Berechne dazu mit einer geeigneten Substitution, dass man für eine beliebige Funktion $g(x)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(ax) g(x)\, dx = \frac{1}{|a|} g(0) = \frac{1}{|a|} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) g(x)\, dx$$

erhält.

(c) Zeige, dass gilt:

$$\delta(h(x)) = \sum_i \frac{1}{|h'(x_i)|} \delta(x - x_i), \quad \text{wobei } h(x_i) = 0 \text{ (einfache Nullstelle).}$$

Gehe dazu wie in (b) vor. Teile das Integral in sinnvolle Abschnitte um die Nullstellen von $h(x)$ auf, z.B. $\int_{-\infty}^{\infty} dx = \int_{x_1-\epsilon}^{x_1+\epsilon} dx + \int_{x_2-\epsilon}^{x_2+\epsilon} dx \ldots$, und transformiere auf die Integrationsvariable $y = h(x)$.

3. Getriebener harmonischer Oszillator (Übungstunde)

Finde eine partikulär Lösung der Differentialgleichung

$$\ddot{x} + \omega^2\, x = f(t) \tag{3}$$

für

$$f(t) = \exp(-\Gamma t) \quad f(t) = t + \cos(\Omega t) \quad . \tag{4}$$

Betrachte jetzt den Fall mit $f(t) = \exp(-\Gamma t)$ im detail. Finde die allgemeine Lösung, indem noch die Lösung der homogenen Gleichung zur partikulär Lösung addiert wird. Bestimme die Integrations konstanten so, dass folgende Randbedingungen erfüllt werden:

(a) **Anfangswertproblem** Der harmonische Oszillator sei in Ruhe zur Zeit $t < 0$ und wird dann zur Zeit $t = 0$ mit der Störung $\exp(-\Gamma t)$ angeregt. Dies entspricht den Anfangsbedingungen $x(0) = 0$ und $\dot{x}(0) = 0$. Die Lösung beschreibt dann die Antwort des Systems auf die Störung.

(b) **Randwertproblem** Bestimme jetzt das Randwertproblem mit den Bedingungen $x(0) = 0$ und $x(T) = 0$. Zeige, dass das Randwertproblem nicht immer eine Lösung hat und bestimme diese Zeiten T wo die Lösung nicht mehr wohldefiniert ist.