Mathematische Methoden der Physik, Übung 8

Prof. Hans Peter Büchler WS 2014/15, 3. Dezember 2014

1. Partielle Ableitungen (Schriftlich)

(a) Betrachte die Funktion

$$f(x,y,z) = \frac{\sin(x^2-y^2)}{1+z^2}. \tag{1}$$

Berechne folgende partiellen Ableitungen

$$\partial_x f, \quad \partial_y f, \quad \partial_z f, \quad \partial_y\partial_x f, \quad \partial_x\partial_y f, \quad \partial_y\partial_z f, \quad \partial_x\partial_z f, \quad \partial_x^2 f, \quad \partial_y^2 f, \quad \partial_z^2 f \tag{2}$$

Verifiziere, dass die Reihenfolge der Ableitungen nicht relevant ist durch explizites vergleichen von $\partial_x\partial_y f = \partial_y\partial_x f$.

(b) Betrachte als nächstes die Funktion

$$g(x,y) = \ln\sqrt{x^2+y^2}. \tag{3}$$

Berechne folgende partiellen Ableitungen

$$\partial_x g, \quad \partial_y g, \quad \partial_y\partial_x g, \quad \partial_x^2 g, \quad \partial_y^2 g, \tag{4}$$

und zeige, dass gilt

$$\partial_x^2 g(x,y) + \partial_y^2 g(x,y) = 0 \tag{5}$$

für $x \neq 0$ oder $y \neq 0$.

2. Polarkoordinaten (Schriftlich)

(a) Betrachte die Funktion

$$f(x,y) = x e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} \tag{6}$$

und berechne $\Delta f(x,y) = (\partial_x^2 + \partial_y^2) f(x,y)$.

(b) Betrachte nun die Funktion in Polar Koordinaten

$$\hat{f}(r,\phi) = f(x(r,\phi), y(r,\phi)) \tag{7}$$

mit $x = r\cos\phi,\ y = r\sin\phi$. Der Laplace-Operator in Polar Koordinaten wurde in der Vorlesung betrachtet und hat die Form

$$\left(\partial_r^2 + \frac{1}{r}\partial_r + \frac{1}{r^2}\partial_\phi^2\right)\hat{f}(r,\phi) \tag{8}$$

Berechne nun diese Ableitungen für die Funktion $\hat{f}$ und zeige die Equivalenz mit dem Resultat aus (a), indem du das Endergebnis wieder in Kartesischen Koordinaten (x,y) ausdrückst.

3. Kettenregel (Übungsstunde)

Die Funktion $I(x)$ ist definiert als

$$I(x) = \int_x^{x^2} \frac{\sin(xt)}{t} dt. \tag{9}$$

Im folgenden wollen wir die Ableitung $\frac{d}{dx}I(x)$ berechnen. Dazu führen wir die Funktion

$$F(v, w, x) = \int_w^v dt \, \frac{\sin(xt)}{t} \tag{10}$$

ein.

(a) Berechne zuerst die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial}{\partial v}F(v, w, x) \qquad \frac{\partial}{\partial w}F(v, w, x) \qquad \frac{\partial}{\partial x}F(v, w, x). \tag{11}$$

(b) Setze jetzt $v(x) = x^2$ und $w(x) = x$. Somit gilt $F(v(x), w(x), x) = I(x)$. Berechne mittels der Kettenregel aus der Vorlesung die Ableitung

$$\frac{d}{dx}F(v(x), w(x), x) \tag{12}$$

und bestimme daher $\frac{d}{dx}I(x)$.

(c) Berechne in analogy die Ableitung $\frac{d}{dx}J(x)$ für

$$J(x) = \int_0^x dy \exp(-xy). \tag{13}$$

Vergleiche das Resultat indem zuerst die Integration durchgeführt wird und anschliessend die Ableitung gebildet wird.