Mathematische Methoden der Physik, Übung 9

Prof. Hans Peter Büchler WS 2014/15, 10. Dezember 2014

1. Zweidimensionale Integrale (Schriftlich)

Berechne für die Funktionen

$$f_1(x,y) = xy \quad \text{und} \quad f_2(x,y) = x^2 - y^2 \tag{1}$$

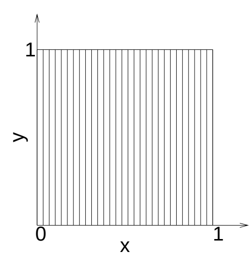
die Integrale

$$I_1 = \int_A dxdy\, f_1(x,y) \quad \text{und} \quad I_2 = \int_A dxdy\, f_2(x,y) \tag{2}$$

für die Gebiete

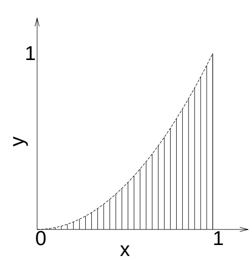
(a)

$$A = \{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\} \tag{3}$$



(b)

$$A = \{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x^2\} \tag{4}$$



(c) Berechne das Volumen des D-dimensionalen Gebietes

$$A = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^D | 0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_D \leq 1\} \tag{5}$$

2. Polarkoordinaten (Schriftlich)

(a) Berechne folgende Integrale

$$I = \int_A dxdy\, x^2 \tag{6}$$
$$I = \int_A dxdy\, \ln\left(x^2+y^2\right) \tag{7}$$

mit Hilfe von Polarkoordinaten, wobei die Fläche A der Einheitskreis ist.

(b) Betrachte folgende Funktion

$$\varphi(x,y) = \arctan(y/x) \tag{8}$$

welche in der Supraleitung einen Vortex beschreibt. Berechne die partiellen Ableitungen $\partial_x\varphi(x,y)$ und $\partial_y\varphi(x,y)$. Die Energy des Vortex ist dann gegeben durch das Mehrdimensionale Integral

$$E = \int_B dxdy\left[(\partial_x\varphi(x,y))^2 + (\partial_y\varphi(x,y))^2\right] \tag{9}$$

wobei der Integrationsbereich B bestimmt ist durch die Bedingung $\xi \leq \sqrt{x^2+y^2} < L$. Berechne dieses Mehrdimensionale Integral mittels Polarkoordinaten.

3. Kugelvolumen (Übungstunde)

(a) Berechne das 'Volumen' der zweidimensionalen Kugel mit dem Gebiet $A = \{(x,y)|x^2+y^2 \leq R^2\}$ mittels

$$V_2 = \int_A dxdy \tag{10}$$

in Kartesischen Koordinaten.

(b) Berechne das obige Integral nun mit Hilfe einer Koordinaten Transformation in Polar Koordinaten.

(c) Wiederhole das Vorgehen aus (a) und berechne das Volumen der dreidimensionalen Kugel mit dem Gebiet $A = \{(x,y)|x^2+y^2+z^2 \leq R^2\}$ mittels

$$V_3 = \int_A dxdydz. \tag{11}$$