Theoretische Physik: Fortgeschrittene Quantentheorie, Übung 6

Prof. Dr. Alejandro Muramatsu WS 2014/15, 27. November 2014

1. **Lorentz-Invarianz**

   a) Zeige, dass eine Größe der Form $A_\mu B^\mu$ lorentzinvariant ist. A und B sind dabei Lorentz-Vierervektoren.

   b) Gegeben sei das Lorentz-invariante Vierer-Integrationsmaß d^4p. Zeige damit die Lorentz-Invarianz von

   $$\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{c}{2E(\mathbf{p})} \tag{1}$$

   mit $E(\mathbf{p}) = \sqrt{\mathbf{p}^2c^2 + m^2c^4}$.
   Hinweis: Starte vom Lorentz-invarianten Ausdruck

   $$d^4p\delta(p_\mu p^\mu - m^2c^2)\theta(p_0) \tag{2}$$

   und benutze

   $$\delta(x^2 - x_0^2) = \frac{1}{2|x|}(\delta(x - x_0) + \delta(x + x_0)). \tag{3}$$

   Was ist die Bedeutung der δ und θ Funktionen?

2. **Allgemeine Drehimpulseigenwerte**

   In dieser Aufgabe sollen die möglichen Eigenwerte der Drehimpulsoperatoren $\boldsymbol{M}^2$ und M_3 mit der **algebraischen Methode** bestimmt werden, d.h. nur unter Verwendung der Kommutator-Relationen

   $$[M_j, M_k] = i\epsilon_{jkl}M_l \quad \text{mit } l = 1, 2, 3. \tag{4}$$

   (**Anmerkung:** Die Kommutatorrelationen bilden die sogenannte *Lie-Algebra* der Gruppen $SO(3)$ und $SU(2)$.)

   a) Begründe zunächst, warum $\boldsymbol{M}^2$ und M_3 gemeinsame Eigenvektoren haben

   $$\boldsymbol{M}^2|\lambda, m\rangle = \lambda|\lambda, m\rangle \tag{5}$$
   $$M_3|\lambda, m\rangle = m|\lambda, m\rangle, \tag{6}$$

   die orthonormal gewählt werden können: $\langle\lambda, m|\lambda' m'\rangle = \delta_{\lambda,\lambda'}\delta_{m,m'}$. Zeige, dass λ nicht negativ sein kann.

   b) Definiere die Operatoren $M_+ = M_1 + iM_2$ und $M_- = M_1 - iM_2$ und zeige folgende Beziehungen

   - $[M_3, M_\pm] = \pm M_\pm$
   - $[M_+, M_-] = 2M_3$

- $\boldsymbol{M}^2 = M_+M_- + M_3^2 - M_3 = M_-M_+ + M_3^2 + M_3$.

Zeige, dass es sich bei $M_\pm$ um Leiteroperatoren handelt, die den Eigenwert m auf $m' = m \pm 1$ erhöhen bzw. erniedrigen und den Eigenwert λ unverändert lassen.

c) Bestimme die Norm des Vektors $M_\pm|\lambda, m\rangle$. Benutze dieses Ergebnis, um zu zeigen, dass für festes λ der Bereich möglicher Werte für m beschränkt ist:

$$\lambda \geq |m|(|m| + 1). \tag{7}$$

Der größte vorkommende Wert sei $l = m_{\text{max}}$. In der Theorie der Lie-Algebren nennt man ihn "höchstes Gewicht". Stelle einen Zusammenhang her zwischen λ und l. (Tipp: $M_+|\lambda, l\rangle = 0$) Verfahre ebenso für das niedrigste Gewicht m_{min}. Welches sind die möglichen Werte für m? Begründe, warum l nur ganz- oder halbzahlig sein kann.

3. Kleinsches Paradoxon

Wir betrachten die Streuung eines Elektrons der Energie E und Impuls $\boldsymbol{p} = p\boldsymbol{e_z}$ mit $p_z > 0$ an einer Potentialstufe in der relativistischen Theorie der Dirac-Gleichung. Das 1D Stufen-Potential sei beschrieben durch

$$V(z) = e \cdot \phi(z) = e \cdot \phi_0 \, \theta(z) \qquad \text{mit } \theta(z) = \begin{cases} 0 & z \leq 0 \\ 1 & z > 0 \end{cases}$$

wobei e die Elementarladung und $\phi_0 > 0$ das Potential für $z > 0$ ist. Nach dem Minimalkopplungs-Prinzip erhalten wir die Dirac-Gleichung für ein Elektron im Potential $V(z)$ als

$$i\hbar\partial_t \Psi(z,t) = \big(V(z) + mc^2\beta + c\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{p}\big)\, \Psi(z,t)$$

(a) Finde eine stationäre Lösung der Dirac-Gleichung der Form

$$\Psi(z,t) = \mathrm{e}^{-iEt/\hbar}\, \Psi(z) \qquad \text{mit } \Psi(z) = \begin{cases} \Psi_\mathrm{i}(z) + \Psi_\mathrm{r}(z) & z \leq 0 \\ \Psi_\mathrm{t}(z) & z > 0 \end{cases},$$

wobei die zeitunabhängigen Spinoren entsprechend die e<u>i</u>nlaufende, <u>r</u>eflektierte und <u>t</u>ransmittierte Welle bezeichnen. Verwende für die einzelnen Beiträge die bekannten Lösungen für freie Teilchen mit entsprechendem Impuls:

$$\begin{aligned} \Psi_\mathrm{i}(z) &= c_\mathrm{i}\, \tilde{u}(\boldsymbol{p}, \uparrow)\, \mathrm{e}^{ipz/\hbar} \\ \Psi_\mathrm{r}(z) &= c_\mathrm{r}\, \tilde{u}(-\boldsymbol{p}, \uparrow)\, \mathrm{e}^{-ipz/\hbar} \\ \Psi_\mathrm{t}(z) &= c_\mathrm{t}\, \tilde{u}(\boldsymbol{p}', \uparrow)\, \mathrm{e}^{ip'z/\hbar} \end{aligned}$$

mit

$$\tilde{u}(\boldsymbol{p}, s) = \begin{pmatrix} \chi^{(s)} \\ \frac{c\,\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{p}}{E_p + mc^2}\chi^{(s)} \end{pmatrix} \qquad \chi^{(\uparrow)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \chi^{(\downarrow)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und Koeffizienten $c_i \in \mathbb{C}$.

(b) Bestimme den Impuls p' in Abhängigkeit von p. Am Punkt $z = 0$ muss $\Psi(z)$ stetig sein (warum fordern wir keine Stetigkeitsbeziehungen für die Ableitung?). Leite daraus Beziehungen zwischen den Koeffizienten $c_\mathrm{i}, c_\mathrm{r}$ und c_t her.

(c) Berechne nun die einfallende (j_i), reflektierte (j_r) und transmitierte (j_t) Stromdichte. Der Stromdichte-Operator ist im Dirac-Formalismus durch $j^\mu = c\,\overline{\Psi}\gamma^\mu\Psi$ gegeben. Diskutiere die drei Fälle:

   (1) $E - e\phi_0 > mc^2$

   (2) $-mc^2 < E - e\phi_0 < mc^2$

   (3) $E - e\phi_0 < -mc^2$

(d) Zeige, dass im Fall (3) der Reflexions-Koeffizient $R \equiv |j_\mathrm{r}/j_\mathrm{i}|$ größer als eins ist, d.h. es werden mehr Teilchen reflektiert als überhaupt einfallen.

Dieser Sachverhalt wird als Kleinsches Paradoxon bezeichnet und ist ein Beispiel dafür, dass in der relativistischen Quantenmechanik Teilchen/Antiteilchen-Paare erzeugt werden können. Im Einteilchenbild des Dirac-Formalismus kostet diese Erzeugung von Teilchen keine Energie. Aus der Relativitätstheorie würde man aber erwarten, dass für ein solchen Prozess die Energie $2mc^2$ aufgebracht werden muss. Diese Ungereimtheit ist ein Zeichen dafür, dass in der relativistischen Quantenmechanik das Einteilchen-Konzept zusammenbricht und mithilfe der relativistischen Quantenfeldtheorie gelöst werden muss.