Theoretische Physik: Fortgeschrittene Quantentheorie, Übung 8

Prof. Dr. Alejandro Muramatsu WS 2014/15, 11. Dezember 2014

1. Eigenschaften des Permutationsoperators Teil 1

Wir betrachten ein System von zwei Teilchen. Der Operator, welcher der Vertauschung der beiden Teilchen zugeordnet ist, bewirkt

$$P_{21}|u_i^{(1)}\, u_j^{(2)}\rangle := |u_j^{(1)}\, u_i^{(2)}\rangle \,. \tag{1}$$

Wie in der Vorlesung eingeführt, nennt man P_{21} den Permutationsoperator ist. Zeige, dass für den Operator P_{21}

a) $P_{21}^{-1} = P_{21}^{\dagger} = P_{21}$ gilt;

b) P_{21} nur die Eigenwerte $\lambda = \pm 1$ besitzen kann und die Vektoren

$$\begin{aligned} |\psi_S\rangle &:= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|u_i^{(1)}\, u_j^{(2)}\rangle + |u_i^{(2)}\, u_j^{(1)}\rangle\right) \,, \\ |\psi_A\rangle &:= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|u_i^{(1)}\, u_j^{(2)}\rangle - |u_i^{(2)}\, u_j^{(1)}\rangle\right) \,, \end{aligned}$$

Eigenvektoren von P_{21} sind.

2. Eigenschaften des Permutationsoperators Teil 2

Zeige, dass für den Ortsoperator q und den Impulsoperator p zweier Teilchen

a) $P_{21}\, q^{(1)}\, P_{21}^{\dagger} = q^{(2)}\,, \quad P_{21}\, q^{(2)}\, P_{21}^{\dagger} = q^{(1)}$

b) $P_{21}\, p^{(1)}\, P_{21}^{\dagger} = p^{(2)}\,, \quad P_{21}\, p^{(2)}\, P_{21}^{\dagger} = p^{(1)}$

gilt.

3. Identische Teilen im Topf

Zwei identische Teilchen sollen sich wechselwirkungsfrei in einem 1D Potentialtopf mit unendlich hohen Wänden bewegen

$$V(q) = \begin{cases} 0 & \text{für } |q| < q_0 \,, \\ \infty & \text{für } |q| \geq q_0 \,. \end{cases}$$

Der Spinzustand des Zwei-Teilchen-Systems möge symmetrisch gegenüber Teilchenvertauschung sein. Die beiden Einzelspins seien parallel, die beiden Teilchen sollen also dieselbe magnetische Quantenzahl m_S haben.

a) Formuliere den Hamiltonian des Zwei-Teilchen-Systems. Zeige, dass die Energieeigenzustände in einen Orts- und einen Spinanteil separieren. Welche Symmetrie muss der Ortsanteil des Gesamtzustandes besitzen, wenn es sich bei den beiden Teilchen um Bosonen bzw. Fermionen handelt?

b) Berechne die möglichen Eigenzustände und Eigenenergien für Bosonen bzw. Fermionen.

c) Gebe die Grundzustandsenergie für zwei Bosonen bzw. zwei Fermionen an.

4. Zitterbewegung des freien Elektrons

Nach der Dirac-Theorie führt ein freies Elektron nur im zeitlichen Mittel eine geradlinige Bewegung aus, der eine hochfrequente "Zitterbewegung" überlagert ist.

a) Integriere ausgehend vom Dirac-Hamiltonian

$$H_D = c\vec{\alpha}\cdot\vec{p} + \beta mc^2 \tag{2}$$

die Heisenberg-Bewegungsgleichung für den Ortsoperator $\vec{x}(t)$. Beachte, dass in einem Zwischenschritt auch die Heisenberg-Bewegungsgleichung für $\vec{\alpha}(t)$ aufgestellt werden muss, wofür die Antikommutator-Relationen der Matrizen α^i und β verwendet werden sollen. Welche Operatoren sind Konstanten der Bewegung?

b) **Freiwillige Zusatzaufgabe:** Die Zitterbewegung ist ein Interferenz-Effekt zwischen Lösungen der Dirac-Gleichung mit positiver und negativer Energie. Es soll gezeigt werden, dass die Zitterbewegung verschwindet, wenn das Wellenpaket eine Überlagerung von Wellenfunktionen nur mit positiven oder nur mit negativen Energien ist. Im folgenden: $\hbar = c = 1$.

i) Begründe, dass die Operatoren

$$\Gamma_\pm \equiv \frac{1}{2}\left[1 \pm \frac{H_D}{E_p}\right] = \frac{1}{2}\left[1 \pm \frac{\vec{\alpha}\cdot\vec{p} + \beta m}{E_p}\right], \tag{3}$$

$$E_p \equiv \sqrt{m^2 + \vec{p}^2} \tag{4}$$

Projektoren auf die Lösungen mit positiver bzw. negativer Energie sind, d.h. $H_D\Gamma_\pm = \pm E_p\Gamma_\pm$.

ii) Zeige, dass der in a) gefundene Term der Zitterbewegung

$$\left\langle \psi \middle| i\left(\vec{\alpha}(0) - \vec{p}H_D^{-1}\right)\frac{e^{-2iH_Dt} - 1}{2} H_D^{-1} \middle| \psi \right\rangle, \tag{5}$$

verschwindet, wenn $|\psi\rangle$ auf freie Lösungen mit nur positiver oder nur negativer Energie projiziert wird. (**Tipp:** Berechne $[H_D, \Gamma_\pm]$, $[H_D, \vec{\alpha}]$ und $[\Gamma_\pm, \vec{\alpha}]$.)