Theoretische Physik : Fortgeschrittene Quantentheorie, Übung 1

Prof. Dr. Alejandro Muramatsu WS 2014/15, 16. Oktober 2014

Informationen zur Vorlesung sowie eine elektronische Version der Übungen und eine Kopie der Vorlesungsnotizen werden auf der Homepage zu finden sein

http ://www.theo3.physik.uni-stuttgart.de/lehre/vorlesungen/QM2.html.

Weitere Informationen zu den Aufgaben, Scheinbedingungen und Ablauf der Übungen werden in der Vorlesung bekannt gegeben.

Dieses Aufgabenblatt enthält Aufgaben zum Themengebiet der Quantentheorie I und soll den Einstieg in die Fortgeschrittene Quantentheorie erleichtern.

1. Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren

a) Führen Sie für den zweidimensionalen harmonischen Oszillator mit Eigenfrequenzen ω_+, ω_- zwei unabhängige Erzeuger- und Vernichter ein mit den Vertauschungsrelationen

$$[a_\pm, a_\pm^\dagger] = 1, \qquad [a_\pm, a_\pm] = [a_\pm^\dagger, a_\pm^\dagger] = 0. \tag{1}$$

Zeigen Sie, dass der Hamiltonian für das System diagonal ist in der Eigenbasis der Besetzungszahloperatoren $N_+ = a_+^\dagger a_+$ und $N_- = a_-^\dagger a_-$. Bestimmen Sie die Eigenenergien. Legt eine Messung der Observablen $N = \langle N_+ + N_- \rangle$ den Zustand eindeutig fest ?

b) Definieren Sie den Grundzustandsvektor $|0,0\rangle$ durch $a_-|0,0\rangle = 0$, normiert auf $\langle 0,0|0,0\rangle = 1$. Der Hilbertraum wird durch die Anwendung der Erzeuger und Vernichter auf $|0,0\rangle$ erzeugt. Zeigen Sie die Kommutatorrelationen

$$[N_+, a_+] = -a_+, \qquad [N_+, a_+^\dagger] = -a_+^\dagger \tag{2}$$

und analog für N_-. Bestimmen Sie die normierten Eigenvektoren $|n_+, n_-\rangle$ der beiden Besetzungszahloperatoren mit Eigenwerten n_+ und n_-.

c) Verifizieren Sie die folgenden Relationen :

$$a_+^\dagger |n_+, n_-\rangle = \sqrt{n_+ + 1}|n_+ + 1, n_-\rangle \tag{3}$$

$$a_+ |n_+, n_-\rangle = \sqrt{n+}|n_+ + 1, n_-\rangle \tag{4}$$

2. Harmonischer Oszillator

Betrachten Sie den ein-dimensionalen harmonischen Oszillator

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}x^2. \tag{5}$$

a) Drücken Sie den Aufsteige-Operator $a^\dagger$ und den Absteige-Operator a durch den Orts-Operator x und den Impuls-Operator p aus. Wie sieht der Hamilton-Operator in den neuen Operatoren aus ?

b) Berechnen Sie folgende Kommutatorrelationen

$$[a, a^\dagger], \quad [x, a^\dagger], \quad [(a)^n, a^\dagger], \quad [H, x], \quad [H, p], \tag{6}$$

mit n ist eine natürliche Zahl.

c) Gehen Sie jetzt in das Heisenbergbild über. Wie sehen die Operatoren

$$a_H(t), \quad a_H^\dagger(t), \quad x_H(t), \quad p_H(t) \tag{7}$$

im Heisenbergbild aus ?

d) Wie sieht die Grundzustands-Wellenfunktion $\psi_0(x)$ aus ? Berechnen Sie jetzt die Wellenfunktion $\psi_1(x)$ zur ersten angeregten Energie durch Anwenden des Aufsteige-Operators.

3. Störungstheorie

Ein Wasserstoffatom wird entlang der z-Achse durch ein harmonisches Potential

$$V_{ext}(\mathbf{x}) = kz^2 \tag{8}$$

gestört.

a) Berechnen Sie die Energiekorrektur des Grundzustandes in 1. Ordnung Störungstheorie.

b) Betrachten Sie jetzt den angeregten Zustand mit der Hauptquantenzahl $n = 2$. Wie groß ist die Energieentartung ? Welche Quantenzahlen charakterisieren die Zustände ?

c) Die Störung führt jetzt zu einer Aufspaltung dieser Energieentartung. Aufgrund der Symmetrie lässt sich sagen, wie diese Aufspaltung der Entartung aussieht. Welches sind die guten Quantenzahlen (Begründung) ? Welches wird der Zustand mit der tiefsten Energie und welcher der mit der höchsten Energie ?

d) Überprüfen Sie die Begründungen aus c) durch explizites Ausrechnen.