

Theoretische Physik: Fortgeschrittene Quantentheorie, Übung 11

Prof. Dr. Alejandro Muramatsu WS 2011/12, 15. Januar 2015

1. Jellium-Modell II

Wir betrachten den aus Aufgabe 10.3 bekannten Hamilton-Operator des Jellium-Modells

$$H_{Jell} = \sum_{\mathbf{k}, \sigma} \frac{\hbar^2 \mathbf{k}^2}{2m} c_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger c_{\mathbf{k}\sigma} + \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{k}, \sigma, \sigma'} v_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{p}+\mathbf{k}\sigma}^\dagger c_{\mathbf{q}-\mathbf{k}\sigma'}^\dagger c_{\mathbf{q}\sigma'} c_{\mathbf{p}\sigma} - \frac{1}{2} v_0 N^2. \quad (1)$$

Zeige, dass H_{Jell} die Teilchenzahl erhält.

2. Weisser Zwerg als Fermigas

Im Russel-Hertzprung Diagramm wird die Leuchtkraft eines Sterns gegen seine dominant emittierte Wellenlänge aufgetragen.

Russel-Hertzprung Diagramm: www.mpg.de/4628994/Stellare_Klassengesellschaft.

Darin verifiziert sich die empirische Regel, dass die Leuchtkraft eines Sterns proportional zu seiner Farbe ist. Aber es gibt auch Ausnahmen zu dieser Regel. Ein Weisser Zwerg ist ein Stern der eine sehr geringe Leuchtkraft in Bezug zu seiner Oberflächentemperatur besitzt und lässt sich in guter Näherung als entartetes Fermigas beschreiben.

Ein idealisierter Weisser Zwerg besteht hauptsächlich aus Helium und besitzt eine Dichte von $\rho \approx 10^7 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \approx 10^7 \rho_\odot$ bei einer Masse von $m \approx 10^{33} \text{g} \approx M_\odot$ und einer zentralen Temperatur von $T \approx 10^7 \text{K} \approx T_\odot$. Bei dieser Temperatur sind die Heliumkerne komplett ionisiert und wir betrachten die Elektronen als ideales Fermigas mit einer Dichte von 10^{30} Elektronen pro cm^3 .

- Warum ist die Beschreibung des weissen Zwerges als entartetes Fermigas im Grundzustand berechtigt, obwohl die Temperatur der der Sonne entspricht? Berechne dazu die Fermi-Temperatur des weissen Zwerges.
- Die Gravitationsanziehung des Heliums, die alleine zum Kollaps des Stern führen würde, ist im Gleichgewicht mit dem Druck der durch die hochenergetischen Fermionen ausgeübt wird. Wie groß ist der Druck $P_0 = -\frac{\partial U(T=0)}{\partial V}$ des Fermigases für relativistische Elektronen und für nicht relativistische Elektronen?

Mithilfe der Gleichgewichtsbedingung der Gravitationsanziehungskraft und des relativistischen Druckes lässt sich eine Abhängigkeit des Radius eines Weissen Zwerges von dessen Masse bestimmen. Ab einer bestimmten Masse M_0 erhalten wir einen imaginären Radius. Diese Masse ist bekannt als Chandrasekhar Grenze (Nobelpreis 1983 siehe Skript) und es gilt

$$M_0 = 1,4M_{\odot}. \quad (2)$$

Physikalisch bedeutet dies, dass der Druck, der durch das Pauli-Verbot entsteht, der gravitativen Anziehung nicht mehr standhalten kann und der Stern kollabiert.