

# Theoretische Physik: Fortgeschrittene Quantentheorie, Übung 12

Prof. Dr. Alejandro Muramatsu WS 2014/15, 22. Januar 2015

## 1. Tight-Binding-Modell

Wir betrachten nun Tight-Binding-Modell für ein eindimensionales Gitter mit  $N_s = 2 + 4n$  Plätzen ( $n \in \mathbb{N}_0$ ) und periodischen Randbedingungen, sowie ohne Wechselwirkung ( $U = 0$ ). Die einzelnen Gitterplätze befinden sich an den Orten  $x_j = a \cdot j$  mit  $j = 0, \dots, N_s - 1$  und der Gitterkonstante  $a$ .

Der Hamilton-Operator in zweiter Quantisierung lautet

$$H = -t \sum_{j,\sigma} \left( c_{j,\sigma}^\dagger c_{j+1,\sigma} + h.c. \right),$$

wobei die Summe über alle Gitterplätze  $j$ , sowie die beiden Spin-Richtungen  $\sigma = \uparrow, \downarrow$  ausgeführt wird.

- (a) Zeige, dass sich der Hamilton-Operator auf Diagonalform

$$H = \sum_{k,\sigma} \epsilon(k) b_{k,\sigma}^\dagger b_{k,\sigma}$$

bringen lässt, indem man eine (diskrete) Fourier-Transformation durchführt und die Vernichter und Erzeuger durch die entsprechenden  $k$ -Raum Operatoren  $b_{k,\sigma}$  bzw.  $b_{k,\sigma}^\dagger$  ausdrückt:

$$c_{j,\sigma} = \frac{1}{\sqrt{N_s}} \sum_k e^{-ikx_j} b_{k,\sigma}$$

Wie lautet  $\epsilon(k)$ ?

- (b) Zeichne die Dispersionsrelation innerhalb der 1. Brillouin-Zone für  $N_s \rightarrow \infty$ .  
(c) Gebe den Grundzustand für  $N_s$  Fermionen an, jeweils  $N_s/2$  mit  $\sigma = \uparrow$  bzw.  $\sigma = \downarrow$ . Bis zu welcher Energie ist das „Band“ gefüllt?  
(d) Für Bosonen unterdrücken wir den Index  $\sigma$  und ersetzen die fermionischen Operatoren durch bosonische. Wie lautet der Grundzustand des Tight-Binding-Modells für  $M$  Bosonen ( $M \in \mathbb{N}$ )?

## 2. Entropie idealer Quanten-Gase

- a) Berechne die Entropie  $S(T, V, \mu)$  des idealen Fermi-Gases. Drücke  $S(T, V, \mu)$  dabei durch die mittlere Besetzungszahl  $\langle n_r \rangle$  aus.  
b) Betrachte das Verhalten von  $S$  für  $T \rightarrow 0$   
c) Berechne die Entropie  $S$  eines idealen Bose-Gases. Drücke  $S(T, V, \mu)$  dabei durch die mittlere Besetzungszahl  $\langle n_r \rangle$  aus.  
d) Überprüfe das Verhalten von  $S$  für  $T \rightarrow 0$ , und zwar für den Fall fester Teilchenzahl  $N(T) = \text{const.}$  und für den Fall  $N(T) \rightarrow 0$ . Nenne Beispiele für die Teilchen im zweiten Fall.