Theoretische Physik: Fortgeschrittene Quantentheorie, Übung 13

Prof. Dr. Alejandro Muramatsu WS 2014/15, 29. Januar 2015

Dieses Aufgabenblatt ist eine **freiwillige Übung**, das heißt alle Teilaufgaben werden als Zusatzpunkte gewertet. Das Blatt 13 wird am 13.02.2015 in den Übungen besprochen, da am 06.02.2015 die Probeklausur in den Übungen besprochen wird.

1. **Cooper-Paare**

   Betrachte ein zusätzliches Elektronenpaar auf dem Fermi-See bei $T = 0$. Wir nehmen an, dass die beiden Elektronen miteinander schwach attraktiv wechselwirken. Die Wechselwirkung mit den Elektronen im Fermi-See dagegen soll vernachlässigt werden, d.h. der Fermi-See beeinflusst das Elektronenpaar nur über das Pauli-Ausschlussprinzip.

   a) Der Schwerpunktsimpuls des Elektronenpaars sei Null. Gib einen antisymmetrisierten Zustand für das Zwei-Elektronen-System an, einmal mit symmetrischer und einmal mit antisymmetrischer Spin-Wellenfunktion. Für welchen der Zustände ist die Wahrscheinlichkeit höher, die Elektronen am gleichen Ort zu finden ?

   b) Aufgrund einer Wechselwirkung $\hat{V} = \sum_{\mathbf{k},\mathbf{k}'} V_{\mathbf{k},\mathbf{k}'} c^\dagger_{\mathbf{k}',\uparrow} c^\dagger_{-\mathbf{k}',\downarrow} c_{\mathbf{k},\uparrow} c_{-\mathbf{k},\downarrow}$ kann der Zustand $|\mathbf{k}\uparrow, -\mathbf{k}\downarrow\rangle$ in den Zustand $|\mathbf{k}'\uparrow, -\mathbf{k}'\downarrow\rangle$ streuen. Die Wechselwirkung sei schwach attraktiv und nur zwischen Paar-Zuständen in einer dünnen Energie-Schale der Dicke $2\hbar\omega_D$ um die Fermi-Energie ungleich Null:

   $$V_{\mathbf{k},\mathbf{k}'} = \begin{cases} -V \text{ mit } V > 0 & \text{für } \epsilon_{\mathbf{k},\uparrow} + \epsilon_{-\mathbf{k},\downarrow} \in [2E_F - \hbar\omega_D, 2E_F + \hbar\omega_D] \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

   wobei $\epsilon_{\mathbf{k},\sigma=\uparrow,\downarrow}$ die kinetische Energie eines freien Elektrons ist.
   Mit der Näherung $\epsilon_{\mathbf{k},\uparrow} + \epsilon_{-\mathbf{k},\downarrow} \approx 2E_F$ kann der Hamilton-Operator für das Zwei-Elektronen-System durch eine $M \times M$-Matrix

   $$\langle \mathbf{k}, -\mathbf{k}|\hat{H}|\mathbf{k}', -\mathbf{k}'\rangle \approx \begin{pmatrix} 2E_F & -V & -V & \cdots & -V \\ -V & 2E_F & -V & \cdots & -V \\ -V & -V & 2E_F & \cdots & -V \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ -V & \cdots & & -V & 2E_F \end{pmatrix}$$

   beschrieben werden, wobei M die Anzahl der Impuls-Zustände $\{|\mathbf{k}, -\mathbf{k}\rangle\}$ auf der Energieschale um E_F ist. Zeige, dass $\hat{H}$ einen gebundenen Zustand hat, nämlich einen Eigenzustand mit Energie $E = 2E_F - (M-1)V < 2E_F$.

2. BCS-Theorie

Der effektive BCS-Hamiltonian ist durch

$$H = \sum_{k,\sigma} \epsilon_k c_{k\sigma}^\dagger c_{k\sigma} - \Delta^* \sum_k c_{-k\downarrow} c_{k\uparrow} - \Delta \sum_k c_{k\uparrow}^\dagger c_{-k\downarrow}^\dagger + \frac{|\Delta|^2}{V}$$

mit $\Delta = V \sum_{k'} \langle c_{-k'\downarrow} c_{k'\uparrow} \rangle$ und $\Delta^* = V \sum_{k'} \langle c_{k'\uparrow}^\dagger c_{-k'\downarrow}^\dagger \rangle$ gegeben.

Die Entkopplung der Zweiteilchenwechselwirkungen mit den Erwartungswerten in den Δ ist durch die Cooper-Paare motiviert. Durch den Austausch virtueller Phononen erhält man eine effektiv attraktive Wechselwirkung zwischen einem Paar von zwei Elektronen mit entgegengesetzem Impuls und Spin, den sogenannten Cooper-Paaren (siehe Aufgabe 1).

a) Sind Cooper-Paare Bosonen? Berechne dazu die bosonischen Vertauschungrelationen der Cooper-Paar-Operatoren $B_{k'}^\dagger = c_{k'\uparrow}^\dagger c_{-k'\downarrow}^\dagger$ und $B_k = c_{-k\downarrow} c_{k\uparrow}$.

b) H kann mit der Bogoliubov-Transformation

$$\begin{aligned} \alpha_k &= u_k c_{k\uparrow} - v_k c_{-k\downarrow}^\dagger & \alpha_k^\dagger &= u_k^* c_{k\uparrow}^\dagger - v_k^* c_{-k\downarrow} \\ \beta_k &= u_k c_{-k\downarrow} + v_k c_{k\uparrow}^\dagger & \beta_k^\dagger &= u_k^* c_{-k\downarrow}^\dagger + v_k^* c_{k\uparrow} \end{aligned}$$

diagonalisiert werden. Zeige, dass fermionischen Vertauschungsrelationen

$$\{\alpha_k^\dagger, \alpha_{k'}\} = \{\beta_k^\dagger, \beta_{k'}\} = \delta_{k,k'}$$

nur gelten, falls $|u_k|^2 + |v_k|^2 = 1$.

c) Betrachte nun den BCS-Zustand

$$|\Omega\rangle = \prod_k \left(u_k + v_k \, c_{k,\uparrow}^\dagger \, c_{-k,\downarrow}^\dagger \right) |0\rangle .$$

Zeige, dass $|\Omega\rangle$ normiert ist. Wie müssen u_k und v_k gewählt werden, um den Grundzustand freier Fermionen zu beschreiben? Gebe den Grundzustand freier Fermionen an.

d) Berechne $\alpha_k |\Omega\rangle$ und interpretiere das Ergebnis.