Theoretische Physik : Fortgeschrittene Quantentheorie, Übung 2

Prof. Dr. Alejandro Muramatsu WS 2014/15, 30. Oktober 2014

1. **Harmonischer Oszillator mit Störung**

   Wir betrachten einen 1D harmonischen Oszillator mit der Masse m und der Frequenz ω_0. Mit $|\varphi_n\rangle$ und $E_n = (n + 1/2)\,\hbar\omega_0$ bezeichnen wir die Eigenzustände bzw. Eigenenergien seines Hamiltonians H_0.

   Für $t < 0$ befinde sich der Oszillator im Grundzustand $|\varphi_0\rangle$. Bei $t = 0$ wird eine Störung der Dauer τ eingeschalten. Sie kann geschrieben werden als

   $$\tilde{V}(t) = \begin{cases} \lambda\,\alpha\,\left(b^\dagger + b\right) & \text{für } \ 0 \le t \le \tau\,, \\ 0 & \text{für } t < 0 \text{ und } \ t > \tau\,; \end{cases}$$

   wobei $\lambda \ll 1$, $\alpha \in \mathbb{R}$ die Störamplitude und $b^\dagger$, b die Auf- und Absteigeoperatoren des harmonischen Oszillators beschreibt. Es sei P_{0n} die Wahrscheinlichkeit, den Oszillator nach dem Puls im Zustand $|\varphi_n\rangle$ zu finden.

   (a) Man berechne P_{01} mit Hilfe der zeitabhängigen Störungstheorie erster Ordnung. Wie ändert sich P_{01} für festes ω_0 mit τ?

   b) Man zeige, dass zur Bestimmung von P_{02} die zeitabhängige Störungstheorie mindestens auf die zweite Ordnung ausgedehnt werden muss.
   Man berechne P_{02}.

2. **Spinsystem mit Störung**

   Man betrachte zwei Spins 1/2, $\mathbf{S}_1$ und $\mathbf{S}_2$. Für Zeiten $t < 0$ hängt der Hamiltonian nicht von den Spins ab und kann als Null erachtet werden, wenn die Energieskala geschickt gewählt wird. Für $t > 0$ kann der Hamiltonian geschrieben werden als

   $$H = \left(\frac{4\Delta}{\hbar^2}\right) \mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2\,. \tag{1}$$

   Wir nehmen an, dass sich das System für Zeiten $t \le 0$ im Zustand $|+\ -\rangle$ (ein Eigenzustand von S_{1z} und S_{2z} mit den Eigenwerten $+\hbar/2$ bzw. $-\hbar/2$) befindet. Zu berechnen ist die Wahrscheinlichkeit, abhängig von der Zeit, einen der folgenden Zustände vorzufinden : $|+\ +\rangle$, $|+\ -\rangle$, $|-\ +\rangle$, $|-\ -\rangle$.

   (a) Ohne eine Näherung zu machen, also exakt.

   (b) Mit der Annahme der Gültigkeit der zeitabhängigen Störungstheorie in erster Ordnung. Die Störung H wird zum Zeitpunkt $t = 0$ eingeschaltet. Man diskutiere anhand eines Vergleichs mit den Ergebnissen der vorigen Teilaufgabe die Gültigkeit dieser Näherung.

3. **Wasserstoff-Atom, Fermis goldene Regel**

   Der Grundzustand eines Wasserstoffatom ($n = 1\,, l = 0$) wird einem zeitabhängigen Potential ausgesetzt. Diese Störung hat die Form

   $$V\left(\mathbf{x}, t\right) = V_0\,\cos\left(kz - \omega t\right)\,. \tag{2}$$

(a) Unter Verwendung zeitabhängiger Störungstheorie soll die Übergangsrate berechnet werden, mit welcher ein Elektron mit dem Impuls $\mathbf{p}$ ausgesendet wird. Man setze dabei voraus, dass die ionisierten Zustände durch ebene Wellen beschrieben werden können.

(b) Wie ist bei diesem Anregungsprozess des Atoms die Winkelverteilung der emittierten Elektronen ?

Hinweis : Verwende für die Grundzustandwellenfunktion des Wasserstoffes

$$\Psi_{n=1,l=0}\left(\mathbf{x}\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{a_0}\right)^{3/2} e^{-r/a_0} \, ,$$

wobei a_0 der Bohr-Radius ist.