

Theoretische Physik: Fortgeschrittene Quantentheorie, Übung 3

Prof. Dr. Alejandro Muramatsu WS 2014/15, 6. November 2014

1. Getriebener Oszillator

Wir betrachten einen eindimensionalen harmonischen Oszillator mit der Masse m und der Frequenz ω_0 . Mit $|\varphi_n\rangle$ bezeichnen wir die Eigenzustände des ungestörten Hamilton-Operators $H_0 = \hbar\omega_0 \left(n + \frac{1}{2}\right)$.

Für $t < 0$ befinde sich der Oszillator im Grundzustand $|\varphi_0\rangle$. Bei $t = 0$ wird eine harmonische Störung $\tilde{V} = F_0 x \cos(\omega t)$ eingeschaltet, wobei F_0 die Stärke der Störung beschreibt.

(a) Zeige, dass das Matrixelement $\langle n'|x|n\rangle$ folgende Form hat:

$$\langle n'|x|n\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_0}} \left(\sqrt{n+1} \delta_{n',n+1} + \sqrt{n} \delta_{n',n-1} \right).$$

Berechne allgemein für $t > 0$ sämtliche Übergangs-/Verweilamplituden $b_{0 \rightarrow n}(t)$ mittels Störungstheorie 1. Ordnung.

- (b) Wir stellen uns vor, der harmonische Oszillator sei ein Elektron mit Ladung $-e$ und Masse m . Die Kraft F_0 sei $-eE_0$. Berechne mit dem Resultat aus Teil (a) dem Erwartungswert des Dipolmoments $\langle -ex \rangle$ für alle Zeiten t in 1. Ordnung.
- (c) Berechne die Übergangswahrscheinlichkeit $P_{0 \rightarrow 1}(t)$ für den nahezu resonanten Fall $\omega \approx \omega_0$. Für welche Zeiten $t < t^*$ ($|\omega_0 - \omega|$) ist die Störungstheorie 1. Ordnung noch sinnvoll?

2. Induzierte Emission und Absorption in einem 2-Niveau Atom

Ein Atom habe die beiden stationären Energieniveaus E_1, E_2 mit $E_2 - E_1 = \hbar\omega_{21} > 0$ und den zugehörigen Eigenzuständen $|1\rangle, |2\rangle$. Es befinde sich in Wechselwirkung mit einem nahezu resonanten monochromatischen elektrischen Wechselfeld

$$\mathbf{E}(t) = E_0 \cdot \mathbf{e}_z \cos(\omega t)$$

mit einem kleinen Detuning $\Delta\omega = \omega - \omega_{21} \ll \omega, \omega_{21}$. Der Wechselwirkungsterm kann mit dem Dipoloperator $\mathbf{p} = -e\mathbf{r}$ als $V = -\mathbf{p}\mathbf{E}$ geschrieben werden.

- (a) Löse die zeitabhängige Schrödingergleichung. Schreibe dazu den Zustand allgemein als $|\Psi\rangle = c_1(t)|1\rangle + c_2(t)|2\rangle$ und löse die gekoppelten Differentialgleichungen für die $c_i(t)$. Als einzige Näherung soll die sogenannte „rotating-wave approximation“ verwendet werden, bei der schnell oszillierende Größen gegenüber langsam veränderlichen Größen vernachlässigt werden, beispielsweise:

$$\begin{aligned} \cos(\omega t) \cdot \exp(-i\omega_{21}t) &= \frac{1}{2} [\exp(i(\omega - \omega_{21})t) + \exp(i(-\omega - \omega_{21})t)] \\ &\approx \frac{1}{2} \exp(i\Delta\omega t). \end{aligned}$$

Verwende die Abkürzung $p_{ij} = \langle i|p_z|j\rangle$, wobei $p_{ii} = 0$ (Wieso?). Wie lange dauert es bis das Atom unter der Wirkung des elektrischen Feldes vom Grundzustand in den angeregten Zustand übergeht (und umgekehrt)?

- (b) Berechne das Dipolmoment

$$\langle p(t) \rangle = \langle \Psi(t) | p_z | \Psi(t) \rangle$$

unter der Annahme, dass $\phi_1(z) = \langle z|1\rangle$ gerade und $\phi_2(z) = \langle z|2\rangle$ ungerade Parität hat.

3. Landau-Levels

Betrachte den zweidimensionalen Hamiltonian

$$H_{\perp} = \frac{1}{2m} \left(p_x - \frac{e}{c} A_x \right)^2 + \frac{1}{2m} \left(p_y - \frac{e}{c} A_y \right)^2 \quad (1)$$

mit $\text{rot} \mathbf{A} = \mathbf{B} = B \mathbf{e}_z$.

- (a) Zeige, dass die kinetischen Impulse $\pi_i = p_i - e/c A_i$ nicht miteinander kommutieren.
 (b) Definiere

$$\Pi_i = \sqrt{\frac{c}{eB}} \pi_i \quad (2)$$

und zeige die Kommutatorrelationen $[\Pi_x, \Pi_y] = i\hbar$ und $[\Pi_x, \Pi_x] = [\Pi_y, \Pi_y] = 0$. Stelle die Verbindung zum Harmonischen Oszillator her.

- (c) Definiere

$$a = \frac{\Pi_x + i\Pi_y}{\sqrt{2\hbar}} \quad (3)$$

und zeige, dass $[a, a^\dagger] = 1$ gilt.

- (d) Bringe H_{\perp} auf die Form

$$H_{\perp} = \hbar\omega_c \left(a^\dagger a + \frac{1}{2} \right) \quad (4)$$

Wie sieht das Spektrum von H_{\perp} aus? Wie ist die Entartung des Systems?