Theoretische Physik: Fortgeschrittene Quantentheorie, Übung 5

Prof. Dr. Alejandro Muramatsu WS 2014/15, 20. November 2014

1. **Metrischer Tensor**

   Sei g_{ij} der metrische Tensor in einem n-dimensionalen Raum. Zeige, dass g^{ij}, wobei

   $$g^{ij} g_{jk} = \delta^i_k \tag{1}$$

   ist, ein Tensor ist.

2. **Feldstärketensor**

   Gegeben seien der Vierervektor A^μ und der Vierervektor der Stromdichte j^μ, welche durch

   $$A^\mu = \left(\varphi\,,\,\vec{A}\right)\,, \tag{2}$$

   $$j^\mu = \left(c\rho\,,\,\vec{j}\right)\,, \tag{3}$$

   bestimmt sind, wobei φ, $\vec{A}$ die elektromagnetischen Potentiale, c die Lichgeschwindigkeit, ρ die Dichte der Ladung und $\vec{j}$ die Stromdichte ist.

   a) Zeige, dass der Feldstärketensor

   $$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu\,, \tag{4}$$

   die gesamte Information über die elektrischen und magnetischen Felder beinhaltet.

   b) Zeige, dass die inhomogenen Maxwell-Gleichungen sich mittels $F_{\mu\nu}$ ausdrücken lassen.

   c) Bestimme die homogenen Maxwell-Gleichungen mittels dualem Feldstärketensor $\mathcal{F}^{\mu\nu}$, der definiert ist als

   $$\mathcal{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} F_{\lambda\sigma}\,. \tag{5}$$

   d) Erkläre, warum die Maxwell-Gleichungen kovariant unter einer Lorentz Transformation sind.

3. **Klein-Gordon Gleichung im Coulomb Potential**

   Wir wollen mithilfe der Klein-Gordon Gleichung relativistische Korrekturen zu den gebundenen Zuständen eines π^--Mesons berechnen. Das π^--Meson ist ein Boson und setzt sich zusammen aus einen down-Quark d und einem Anti-up-Quark $\bar{u}$. Wir suchen nun stationäre Lösungen mit dem Ansatz

   $$\Psi(\mathbf{r}, t) = e^{-iEt/\hbar}\Psi(\mathbf{r}) \tag{6}$$

Anmerkung: Pionen haben zwar eine endliche Lebensdauer ($\tau_{\pi^-} = 2,55 \cdot 10^{-8}$s), allerdings lsst sich die klassische Umlaufzeit mit der Unschärferelation zu $T \approx 10^{-21}$s abschätzen. Dies rechtfertigt die Betrachtung der Zustände als gebunden. (vgl. Schwabl QMII)

a) Führe zunächst die Ersetzungen

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t} \to i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - e\Phi \quad \text{und} \quad \frac{\hbar}{i}\nabla \to \frac{\hbar}{i}\nabla - \frac{e}{c}\mathbf{A} \tag{7}$$

durch und setze zusätzlich $\mathbf{A} = 0$ und $e\Phi(r) = -\frac{Ze^2}{r}$ für das Coulomb Potential. Wie sieht die Klein-Gordon Gleichung nun aus?

b) Führe einen Separationsansatz $\Psi(\mathbf{r}) = Y_l^m(\theta, \phi)\psi(r)$ durch mit den bekannten Kugelflächenfunktionen $Y_l^m(\theta, \phi)$. Vergleiche das Ergebniss des Radialteils mit den Ersetzungen $\rho = \frac{rEe^2}{Z\hbar^2 c^2}$ und der Feinstrukturkonstanten $\alpha = \frac{e^2}{\hbar c}$ mit dem nichtrelativistischen Ergebniss.

c) Durch Vergleich der Funktionen lässt sich aus dem nichtrelativistischen Spektrum auf das Spektrum der Klein-Gordon Gleichung schließen. Die neue "Drehimpuls-Quantenzahl" l' ist nun keine ganze Zahl mehr und es gilt

$$l'(l'+1) = l(l+1) - (Z\alpha)^2 \tag{8}$$

mit der bekannten Drehimpuls-Quantenzahl l. Drücke das neue Energiespektrum durch l aus und verwende nur die Lösung der positiven Wurzel für l'. Entspricht die erhaltene Energie der beobachteten Feinstruktur?