Prof. Dr. Hans Peter Büchler
Institut für Theoretische Physik III, Universität Stuttgart

21. Februar 2017
WS 2016/17

Aufgabe 1: Grundlagen der Quantenmechanik

a) Schreibe die kanonischen Vertauschungsrelationen für den Ortsoperator x und den Impulsoperator p auf. Wie sehen die Operatoren x und p in der Ortsdarstellung aus?

b) Ein System sei im Zustand $|\psi\rangle$ präpariert. Wie sieht die Dichtematrix ρ des Systems aus? Was gilt für Spur$[\rho]$ und Spur$[\rho^2]$?

c) Es sei A eine zeitunabhängige Observable im Schrödinger Bild und $|\psi(t)\rangle$ eine Lösung der Schrödinger Gleichung. Wie sieht die Observable A_H und der Zustand $|\psi_\mathrm{H}\rangle$ im Heisenberg Bild zur Zeit t aus?

d) Welche mathematischen Strukturen zeichnen einen Hilbertraum aus? Gib zwei Beispiele von Hilberträumen.

Aufgabe 2: Zwei-Zustands-System

Wir betrachten ein quantenmechanisches System mit den beiden Basiszuständen $|g\rangle$ und $|e\rangle$, und dem Hamiltonian H mit

$$H = \hbar\omega\, \sigma_x = \hbar\omega \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad |g\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |e\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

a) Bestimme die Eigenenergien und Eigenzustände des Systems.

b) Berechne den Zeitentwicklungsoperator

$$U(t) = e^{-\frac{i}{\hbar}Ht} \tag{2}$$

(Tipp: $\sigma_x^2 = 1$).

c) Zur Zeit $t = 0$ sei das System im Zustand $|\psi(0)\rangle = |g\rangle$. Wie sieht die Zeitevolution $|\psi(t)\rangle$ aus?

d) Zur Zeit t führt ein Beobachter eine Messung mit der Observable σ_z durch. Das Messgerät zeigt durch einen Fehler das Resultat nicht an. Somit ist für den Beobachter das System mittels einer Dichtematrix beschrieben. Wie sieht diese Dichtematrix aus?

Aufgabe 3: Eindimensionaler Potentialtopf

Ein Teilchen der Masse m bewege sich in einem Potential der Form

$$V(x) = \begin{cases} 0 & |x| \le a \\ \infty & |x| > a \end{cases} \tag{3}$$

Die Lösungen der Schrödinger-Gleichung sind bestimmt durch die Energieeigenwerte

$$E_n = \frac{\hbar^2 \pi^2}{8ma^2} n^2 \qquad n \in \mathbb{N} \tag{4}$$

und die Eigenfunktionen

$$\begin{aligned} u_n^{\mathrm{g}}(x) &= \frac{1}{\sqrt{a}} \cos\left(\frac{n\pi x}{2a}\right), & |x| \ll a, && n = 1, 3, 5, \ldots \\ u_n^{\mathrm{u}}(x) &= \frac{1}{\sqrt{a}} \sin\left(\frac{n\pi x}{2a}\right), & |x| \ll a && n = 2, 4, 6, \ldots \end{aligned} \tag{5}$$

a) Es sei jetzt ein zusätzliches Störpotential $H_1 = \lambda \sin(\frac{\pi x}{2a})$ vorhanden. Berechne die Korrekturen der Eigenenergien in erster Ordnung Störungstheorie.

b) Wie sieht die Energiekorrektur in 2^{ter} Ordnung Störungstheorie aus? Berechne die Korrektur explizit für dem Grundzustand.

Aufgabe 4: Wasserstoff Atom

Das Elektron im Wasserstoff Atom hat den Spin $\mathbf{S}$ mit $S = 1/2$, den Bahndrehimpuls $\mathbf{L}$, und den nuklearen Spin $\mathbf{I}$ des Kernes mit $I = 1/2$.

a) Das System sei im elektronischen Grundzustand mit Bahndrehimpuls $l = 0$ und Hauptquantenzahl $n = 1$. Wie gross ist die Grundzustandsentartung? Welche Werte des Gesamtdrehimpulses $\mathbf{J} = \mathbf{S} + \mathbf{L} + \mathbf{I}$ sind nach dem Drehimpulsadditionstheorem möglich?

b) Das System sei jetzt in einem Zustand mit Bahndrehimpuls $l = 1$. Welches sind nun die erlaubten Werte des Gesamtdrehimpulses und wie gross ist die jeweilige Entartung?

c) Betrachte eine Störung des Wasserstoff Atoms mit dem Hamiltonian

$$H_1 = \lambda\, \mathbf{I} \cdot (\mathbf{L} \wedge \mathbf{S})\,. \tag{6}$$

Ist das System mit dieser Störung immer noch rotationsinvariant und der Gesamtdrehimpuls $\mathbf{J}$ ein gute Quantenzahl?

Aufgabe 5: Landau-Level

Betrachte den Hamiltonian

$$H = H_\perp + \frac{p_3^2}{2m}, \qquad H_\perp = \frac{1}{2m}\left(p_1 - \frac{e}{c}A_1\right)^2 + \frac{1}{2m}\left(p_2 - \frac{e}{c}A_2\right)^2 \tag{7}$$

mit $\mathrm{rot}\mathbf{A} = \mathbf{B} = B\mathbf{e}_z$.

a) Zeige, dass die kinetischen Impulse $\pi_i = p_i - e/cA_i$ nicht miteinander kommutieren.

b) Definiere

$$\Pi_i = \sqrt{\frac{c}{eB}}\pi_i \tag{8}$$

und zeige die Kommutatorrelationen $[\Pi_1, \Pi_2] = i\hbar$ und $[\Pi_1, \Pi_1] = [\Pi_2, \Pi_2] = 0$.

c) Stelle die Verbindung zum harmonischen Oszillator her.

d) Definiere

$$a = \frac{\Pi_1 + i\Pi_2}{\sqrt{2\hbar}} \tag{9}$$

und zeige, dass $[a, a^\dagger] = 1$ gilt.

e) Bringe $H_\perp$ auf die Form

$$H_\perp = \hbar\omega_c\left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right) \tag{10}$$

f) Wie sieht das Spektrum von H aus?