

Anderson-Lokalisierung

Hauptseminar: Wechselwirkende Quantengase - WS 2009/2010

David Peter

(Datum: 14. Februar 2010)

Dieses Dokument enthält eine Einführung in das Thema Anderson-Lokalisierung, insbesondere im Bezug auf Bose-Einstein-Kondensate. Nach einem einführenden Kapitel werden zwei theoretische Modelle vorgestellt und es wird gezeigt, wie das Aubry-André-Modell mittels Computersimulationen untersucht werden kann. Abschließend werden zwei Experimente beschrieben, bei denen Anderson-Lokalisierung an Bose-Einstein-Kondensaten beobachtet wurde.

Unordnung ist in den meisten Fällen eine unerwünschte Eigenschaft eines physikalischen Systems. Man arbeitet oft mit idealisierten Modellen, die zufällige Störungen ignorieren, beispielsweise reibungsfreie Ebenen in der klassischen Mechanik oder idealisierte Kristallgitter in der Festkörperphysik. Auch im Rahmen der Bose-Einstein-Kondensation ist die Unordnung in Form des thermischen Untergrunds ein unerwünschter Effekt, der durch Kühlung so weit wie möglich unterdrückt wird. Eine Reihe von Phänomenen baut jedoch grundlegend auf Unordnung auf, meist in Form von zufälligen Störstellen im Potential. Zu diesen gehören bekannte Effekte, wie die Hochtemperatursupraleitung oder der Quanten-Hall-Effekt.

Die Anderson-Lokalisierung ist ebenfalls eine Folge von zufälligen Störungen [1]. Sie wurde 1958 von Philip W. Anderson theoretisch beschrieben (Nobelpreis 1977). In Zufallspotentialen kann es unter bestimmten Bedingungen zur Lokalisierung von quantenmechanischen Teilchen kommen. In Festkörpern kann auf diese Weise ein Metall-Isolator-Übergang induziert werden, der nicht von der Wechselwirkung der Elektronen untereinander (vgl. Mott-Isolator-Übergang) getrieben wird, sondern durch Unordnung im Potential.

Bevor die Anderson-Lokalisierung bei Bose-Einstein-Kondensaten realisiert wurde [2, 3], konnte man die Lokalisierung schon bei verschiedenen anderen Systemen beobachten, unter anderem bei Ultraschallwellen [4], Mikrowellen [5] und Licht [6].

EINFÜHRUNG

In einem periodischen Kristall ist durch die Translationsinvarianz eine Symmetrie gegeben, die zu Blochwellen als Lösung der Schrödingergleichung führt. Dies sind amplitudenmodulierte Wellen, die über den gesamten Festkörper ausgebreitet, also delokalisiert sind. Falls die Fermienergie in einem Energieband liegt, können sich die Elektronen völlig frei durch den Kristall bewegen und es kommt so zum elektrischen Transport. Falls Störstellen die Translationsinvarianz im Kristall brechen, sind die Blochwellen keine Lösungen mehr. Bei schwacher Unordnung kann man über Störungstheorie oder semiklassische

Theorien (Drude- oder Sommerfeldmodell) die Abnahme der Leitfähigkeit beschreiben. Bei starker Unordnung muss das Problem jedoch vollständig quantenmechanisch behandelt werden.

Im Folgenden lösen wir uns vom Kontext der Festkörperphysik und betrachten ein einzelnes Teilchen in einem Unordnungs-Potential, das durch Anwesenheit mehrerer Störstellen erzeugt wird. Das Teilchen bewegt sich im Zwischenraum frei und wird nur an den Störstellen gestreut.

Die Anderson-Lokalisierung kann anschaulich wie folgt verstanden werden (vgl. Abbildung 1): Die Wahrscheinlichkeit $W(A, B)$, dass ein Teilchen von Störstelle A zu B propagiert, kann wie folgt berechnet werden:

$$W(A, B) = \left| \sum_{\Gamma} P(\Gamma) \right|$$

Es wird über alle Pfade Γ summiert, die von A über beliebig viele Zwischenstellen nach B zeigen. Dabei werden jeweils die Wahrscheinlichkeitsamplituden $P(\Gamma) = p_{\Gamma} \cdot e^{i\varphi_{\Gamma}}$ addiert. Jeder Pfad besitzt dabei eine gewisse Phasenverschiebung φ_{Γ} , die von dem genauen Verlauf des Pfades, der Länge und dem durchlaufenen Potential abhängt. Interessant ist der Fall geschlossener Pfade, wenn also die Wahrscheinlichkeit $W(A, A)$ berechnet werden soll, dass das Teilchen zu A zurückgestreut wird (bzw. dort lokalisiert ist). Für jeden geschlossenen Pfad Γ gibt es dann auch den umgekehrten Weg $-\Gamma$, welcher die selbe Phase $\varphi_{-\Gamma} = \varphi_{\Gamma}$ besitzt, da beide Pfade genau den gleichen Weg durchlaufen.

Die beiden Wahrscheinlichkeitsamplituden $P(\Gamma)$ und $P(-\Gamma)$ addieren sich daher kohärent. Wenn die Streulendichte sehr hoch ist, existieren viele geschlossene Pfade mit einer hohen Amplitude p_{Γ} , die jeweils einen kohärent überlagerten Rückweg besitzen und das Teilchen bleibt mit hoher Wahrscheinlichkeit am Ort A lokalisiert. Diesen Prozess nennt man kohärente Rückstreuung.

Im betrachteten Problem treten zwei relevante Längenskalen auf: Die De Broglie-Wellenlänge $\lambda_{dB} = \frac{\hbar}{p}$ bezieht die Teilcheneigenschaften (Impuls) ein. Auf der anderen Seite beschreibt die mittlere freie Weglänge l im Kristall die Eigenschaften des Zufallspotentials (Maß für den mittleren Abstand zweier Störstellen und damit für

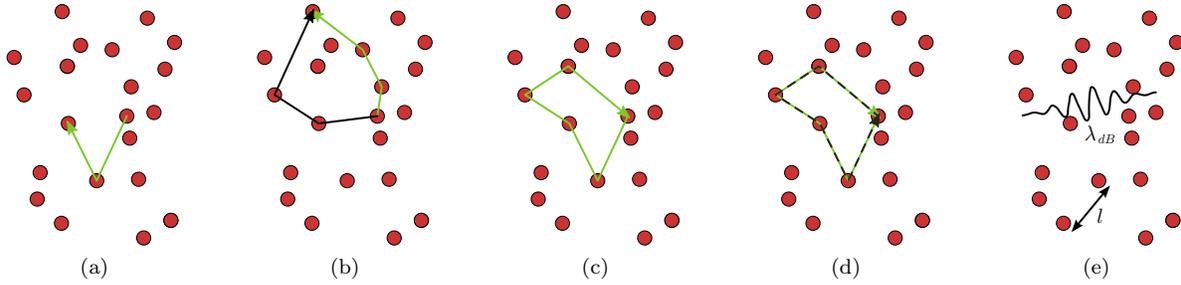


Abbildung 1. Visualisierung zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit $W(A, B)$, dass ein Teilchen von einer Störstelle A zu einer anderen Störstelle B gestreut wird. (a) Das Teilchen wird nur an den Störstellen (rot) gestreut. Dazwischen bewegt es sich quasi frei. (b) Um die Wahrscheinlichkeit $W(A, B)$ zu berechnen, muss über alle möglichen Pfade summiert werden. (c) Das Teilchen kann über geschlossene Pfade zurückgestreut werden. (d) Zu jedem geschlossenen Pfad existiert auch der entsprechende Rückweg. Dieser besitzt die selbe Phasenverschiebung und aufgrund der kohärenten Überlagerung ist die Rückstreuung bevorzugt. (e) Relevante Längenskalen im betrachteten Problem sind die De Broglie-Wellenlänge λ_{dB} , sowie die mittlere freie Weglänge l .

die Stärke der Unordnung).

In drei Dimensionen kann das Ioffe-Regel Kriterium angewandt werden [7], welches eine Schranke festlegt, ab der Lokalisierung auftreten kann

$$l < \lambda_{dB}$$

Anderson-Lokalisierung tritt also nur dann auf, wenn der Impuls klein oder die Unordnungsdichte groß genug ist. Dies führt zu einer sogenannten Mobilitätskante, denn nur Teilchen mit Impuls $p > \frac{\hbar}{l}$ können sich frei bewegen.

Mehrmals wurde der Begriff der Lokalisierung angesprochen, ohne genau festzulegen, was man darunter versteht. Klassisch ist ein Teilchen in einem Potential $V(x)$ lokalisiert, falls seine Energie nicht groß genug ist, um die Potentialwände zu allen Seiten zu überwinden. Quantenmechanisch kann dies einerseits kein ausreichendes Kriterium sein, denn es ist möglich, dass das Teilchen tunnelt.

Andererseits wäre das Kriterium aber auch zu scharf, denn Anderson-Lokalisierung tritt auch dann auf, wenn die Teilchenenergie größer als die Potentialstärke ist.

Einen Zustand nennt man daher lokalisiert, falls die Wellenfunktion (von einem Zentrum \mathbf{r}_0 aus) hinreichend schnell abfällt, siehe Abbildung 2. Im Fall der Anderson-

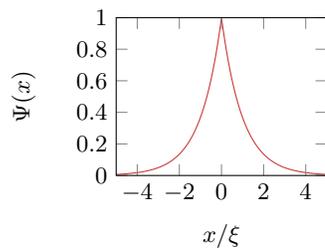


Abbildung 2. Exponentiell abfallende Wellenfunktion mit Lokalisierungslänge ξ .

Lokalisierung fällt die Wellenfunktion exponentiell ab [8]:

$$\Psi(\mathbf{r}) \propto \exp(-|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|/\xi)$$

Die dabei auftretende Länge ξ nennt man *Lokalisierungslänge*.

THEORIE

Anderson-Modell

Das hier vorgestellte Anderson-Modell ist das einfachste theoretische Modell, um Anderson-Lokalisierung zu beschreiben. Der Hamilton-Operator in zweiter Quantisierung lautet

$$H = -J \underbrace{\sum_{\langle i, j \rangle} (a_i^\dagger a_j + a_j^\dagger a_i)}_{\text{kinetische Energie}} + \underbrace{\sum_j \Delta_j a_j^\dagger a_j}_{\text{ext. Potential}}$$

Dabei bezeichnen a , bzw. a^\dagger die Vernichter und Erzeuger an den jeweiligen Gitterplätzen, J/h die Tunnelrate zu den benachbarten Gitterplätzen und $\langle i, j \rangle$ die Summe über benachbarte Plätze i und j .

Die Stärke des äußeren Potentials wird über die Funktion Δ_j angegeben. Im Anderson-Modell ist Δ_j eine Zufallszahl, die einer gewissen Wahrscheinlichkeitsverteilung folgt. Im einfachsten Fall wählt man eine gleichmäßig verteilte reelle Zahl aus einem Intervall $[0, \Delta]$.

Das Modell besitzt folgende Eigenschaften. In drei Dimensionen kann es den Metall-Isolatorübergang mit Δ/J als Ordnungsparameter beschreiben. In ein und zwei Dimensionen sind für $\Delta/J > 0$ jedoch *alle* Zustände lokalisiert (Isolator). Im Abschnitt „Simulationen“ soll ein einfaches 1D-Modell untersucht werden. Da im Anderson-Modell jedoch kein Phasenübergang in einer Dimension

stattfindet, wird im Folgenden das leicht abgewandelte Aubry-André-Modell vorgestellt. Dieses Modell wird auch teilweise in den Experimenten realisiert.

Aubry-André-Modell

Der Hamilton-Operator für das diskrete Aubry-André-Modell [9] hat die gleiche Struktur wie im Anderson-Modell.

$$H = \underbrace{-J \sum_{\langle i,j \rangle} (a_i^\dagger a_j + a_j^\dagger a_i)}_{\text{kinetische Energie}} + \underbrace{\Delta \sum_j \cos(2\pi\beta j) a_j^\dagger a_j}_{\text{ext. Potential}}$$

Hier beschreibt Δ allgemein die Stärke des äußeren Potentials, es kommt jedoch noch der Term $\cos(2\pi\beta j)$ hinzu. Für $\beta = 0$ erhält man ein konstantes Potential, für $\beta \in \mathbb{Q}$ variiert das Potential von Gitterplatz zu Gitterplatz, wiederholt sich jedoch nach u Gitterplätzen, falls $\beta = \frac{u}{v}$ die Darstellung als Bruch ist.

Ist jedoch $\beta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ eine irrationale Zahl, so erhält man ein sogenanntes quasiperiodisches Potential, das sich nicht wiederholt. Das Potential ist also nicht zufällig, jedoch reicht dieses quasiperiodische Gitter um Lokalisierung hervorzurufen.

Das Aubry-André-Modell besitzt auch in einer Dimension einen Phasenübergang. Falls $\beta = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ der goldene Schnitt ist, so findet der Phasenübergang bei $\Delta/J = 2$ statt.

SIMULATIONEN

Das diskrete Aubry-André-Modell kann in einer Dimension auf einfache Art und Weise durch Computersimulationen untersucht werden. Der Hilbert-Raum ist im Fall von N Gitterplätzen ebenfalls N -dimensional und Operatoren können daher als $N \times N$ Matrizen dargestellt werden. Im Folgenden wird das Verfahren beschrieben, mit dem die Zustände und Eigenenergien berechnet werden können. Es kann auch verwendet werden um dynamische Simulationen durchzuführen.

Verfahren

Zunächst wird der diskrete Hamilton-Operator für N Gitterplätze aufgestellt:

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} \Delta \cos(1\tilde{\beta}) & -J & & \dots \\ -J & \Delta \cos(2\tilde{\beta}) & -J & \\ & -J & \Delta \cos(3\tilde{\beta}) & \\ \vdots & & & \ddots \end{pmatrix}$$

Dabei wurde abkürzend $\tilde{\beta} = 2\pi\beta$ verwendet. Auf der Hauptdiagonalen steht der Anteil der potentiellen Energie, der von Gitterplatz zu Gitterplatz variiert. Auf den beiden Nebendiagonalen steht der Beitrag der kinetischen Energie, bzw. das Überlapp-Integral zwischen benachbarten Gitterplätzen. Auch die Randbedingungen sind hiermit schon festgelegt. Das Überlapp-Integral zwischen dem 1. und dem N . Gitterplatz steht in $H_{1,n}$ bzw. $H_{n,1}$ und wurde hier auf 0 gesetzt (feste Randbedingungen). Wählt man dort ebenfalls $-J$, so erhält man periodische Randbedingungen. Für $N \gg 1$ ist der Phasenübergang in beiden Fällen zu beobachten.

Im nächsten Schritt wird die stationäre Schrödingergleichung $\hat{H}|\Psi\rangle = E|\Psi\rangle$ gelöst. Dabei interessiert zunächst nur der Grundzustand. Es werden dazu die Eigenwerte und Eigenvektoren von \hat{H} berechnet und der Zustand mit dem geringsten Energiewert gesucht. Dies ist möglich, da es nur N Eigenzustände gibt, die nach der Energie sortiert werden können.

Schließlich muss noch ein Maß für die Lokalisierungslänge ξ gefunden werden. Diese ist proportional zur Streuung

$$\Delta x = \sqrt{\langle \Psi | x^2 | \Psi \rangle - \langle \Psi | x | \Psi \rangle^2}$$

denn für lokalisierte Zustände $\Psi(x) = \xi^{-1/2} \cdot e^{|x-x_0|/\xi}$ folgt:

$$(\Delta x)^2 = \frac{1}{\xi} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{2|x|/\xi} \cdot x^2 = \frac{\xi^2}{2}$$

und damit $\xi = \sqrt{2} \Delta x$.

Ergebnisse

Abbildung 3 zeigt die Ergebnisse dieser Berechnungen für verschiedene Verhältnisse Δ/J . Anhand der Dichteverteilungen kann man nachvollziehen, dass ein Phasenübergang für $\Delta/J = 2$ stattfindet. Noch klarer erkennt man den Übergang anhand der Lokalisierungslänge, siehe Abbildung 4.

EXPERIMENTE

Die Anderson-Lokalisierung wurde in anderen Systemen schon beobachtet, dennoch gibt es gute Gründe die Anderson-Lokalisierung auch im Rahmen der (wechselwirkenden) Quantengase zu untersuchen. Durch Feshbach-Resonanzen [10] sowie das Einstellen der Teilchendichte kann bei diesen Systemen die Wechselwirkung kontrolliert werden. Auf diese Weise ist es zum einen möglich die Wechselwirkung so gering zu halten, dass sie die Effekte der Anderson-Lokalisierung nicht überlagert.

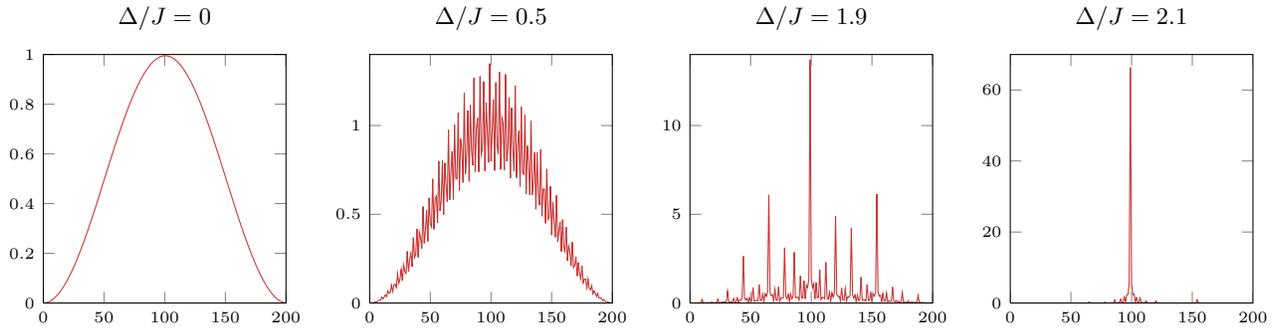


Abbildung 3. Dichteverteilung $|\Psi(k)|^2$ für das Aubry-André-Modell mit 200 Gitterplätzen für verschiedene Δ/J . Für $\Delta/J = 0$ ist das Teilchen frei und hat aufgrund der festen Randbedingungen einen Dichteverlauf $\propto \sin^2(\frac{\pi}{L} \cdot k)$. Für zunehmendes Δ/J erkennt man Oszillationen in der Dichte und bei $\Delta/J \approx 2$ findet der Phasenübergang zum lokalisierten Zustand statt.

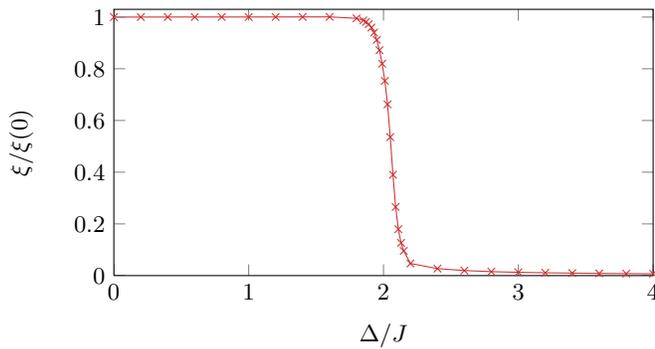


Abbildung 4. Lokalisierungslänge in Einheiten von $\xi(0)$, der Lokalisierungslänge bei $\Delta/J = 0$. Der Phasenübergang vom delokalisierten zum lokalisierten Zustand bei $\Delta/J = 2$ ist deutlich zu erkennen.

Zum anderen lässt sich das Zusammenspiel von Wechselwirkung und Unordnung gezielt untersuchen (siehe Ausblick).

Ein weiterer Vorteil der Quantengase liegt in der Möglichkeit, die Dimensionalität zu beeinflussen. Durch die Form der Falle können (quasi)-ein- oder zweidimensionale Systeme untersucht werden.

Zwei Experimente, bei denen die Anderson-Lokalisierung an Bose-Einstein-Kondensaten (BEK) beobachtet werden konnte, wurden 2008 zeitgleich publiziert und sollen hier vorgestellt werden. Sie unterscheiden sich vor allem in der Art und Weise, wie das Zufallspotential erstellt wird.

BEK im Laser-Speckle

In der Gruppe um A. Aspect wurde für die Erstellung des Zufallspotentials ein Laser-Speckle-Muster verwendet [2, 11, 12]. Ein solches Muster entsteht, wenn kohärente Strahlung durch ein diffuses Medium geleitet wird. Im Experiment wurde dazu ein aufgeweiteter,

gegenüber der Resonanzfrequenz blauverschobener Laserstrahl bei 514nm mit niedriger Leistung verwendet. Das Speckle-Muster zeichnet sich durch eine kornartige Struktur aus. Eine charakteristische Größe ist dabei die durchschnittliche Größe dieser Körner. Im Experiment erreichte man einen Durchmesser von $\pi\sigma_R \approx 0,82\mu\text{m}$, was ausreichend klein ist um Anderson-Lokalisierung zu erreichen. Die Korngröße führt zu einer effektiven Mobilitätskante, denn für Teilchen mit einem Impuls größer als $\hbar k_c = 2\hbar/\sigma_R$ tritt keine Lokalisierung auf, da über die körnige Struktur gemittelt wird.

Man startete bei diesem Experiment mit einem BEK aus ca. 20.000 ^{87}Rb Atomen. Diese wurden in einer Quasi-1D Falle mit Fallenfrequenzen $\omega_{\perp}/2\pi = 70\text{Hz}$, bzw. $\omega_z/2\pi = 5,4\text{Hz}$ (Thomas-Fermi-Radius: $3\mu\text{m}$ bzw. $35\mu\text{m}$) gefangen. Nachdem die Falle in z -Richtung abgeschaltet wurde, kann das BEK im Laser-Speckle-Potential mehrere Millimeter weit expandieren. Anschließend ist die Dichte so klein, dass die Wechselwirkung vernachlässigt werden kann, da der Wechselwirkungsterm in der Gross-Pitaevskii-Gleichung proportional zur Dichte ist. Die Messungen der Dichteprofile wurden durch Fluoreszenz-Aufnahmen mit einer Auflösung von $15\mu\text{m}$ erstellt.

Abbildung 5 zeigt die Ergebnisse dieser Messungen. Der exponentielle Abfall der Dichte stellt sich nach einer halben Sekunde ein und ist dann über mehrere Sekunden hinweg beobachtbar. Die Lokalisierungslänge beträgt $\xi \approx 0,5\text{mm}$.

Um die Mobilitätskante zu untersuchen, wurde der größte Impuls im Kondensat $\hbar k_{\text{max}}$ durch time-of-flight Aufnahmen ohne Laser-Speckle bestimmt. Es stellt sich heraus, dass oberhalb der Mobilitätskante $k_{\text{max}} > 1/\sigma_R$ ebenfalls eine Art von Lokalisierung auftritt, allerdings fällt die Dichte dort gemäß einem Potenzgesetz ab: $\rho(z) \propto |z|^{-\beta}$. Theoretisch wurde ein Wert von $\beta = 2$ vorhergesagt und dieser bestätigte sich im Experiment mit $\beta = 2,01 \pm 0,03$.

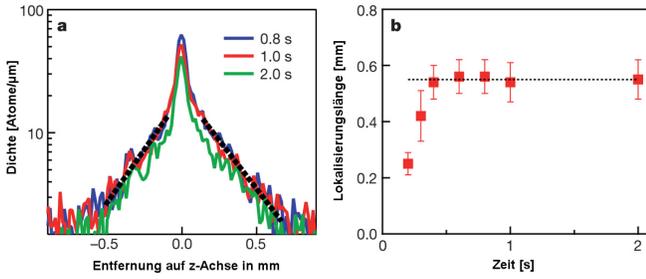


Abbildung 5. Gezeigt ist das Dichteprofil des BEK im Laser-Speckle. In der halblogarithmischen Darstellung kann man erkennen, dass die Dichte am Rand exponentiell abfällt - ein starker Hinweis auf Anderson-Lokalisierung. Auch nach mehreren Sekunden hat sich die Form der Dichte nicht verändert, die Lokalisierungslänge liegt im Millimeterbereich.

BEK im quasiperiodischen Gitter

In der Gruppe um M. Inguscio wurde ein quasiperiodisches Potential verwendet um Lokalisierung beobachten zu können [3, 9]. Das Potential wurde durch ein optisches Gitter mit zwei stehenden Wellen bei verschiedenen Wellenlängen (1032nm und 862nm) realisiert. Für $\beta = \lambda_1/\lambda_2$ aus dem Aubry-André-Modell erhält man damit einen Wert von $\beta \approx 1,1972$.

Es wurde ein BEK aus etwa 10.000 ^{39}K Atomen verwendet, bei dem die Wechselwirkung durch Anlegen eines Magnetfelds nahe einer Feshbach-Resonanz unterdrückt wurde.

Abbildung 6 zeigt Absorptionsoptionen des BEK sowie ein universelles Verhalten für verschiedene J/h am Phasenübergang. Für $\Delta/J \gtrsim 2$ bleibt die ursprüngliche Form des Kondensats erhalten, für kleinere Werte diffundiert das Gas durch das optische Gitter. Für verschiedene Werte von J tritt der Phasenübergang an der selben Stelle auf, dies ist ein Hinweis auf das universelle Verhalten. Relevant für den Phasenübergang ist nur der dimensionslose Parameter Δ/J .

Abbildung 7 zeigt Dichteprofile des delokalisierten, sowie des lokalisierten Kondensats. Es wurde eine Fit-Funktion (rot) mit einem freien Parameter α verwendet um die Dichteprofile zu approximieren:

$$\rho(z) = \rho_0 \exp(-(|x - x_0|/\xi)^\alpha)$$

Für $\alpha = 2$ erhält man ein Gaußsches Profil, und somit ein freies Kondensat. Für $\alpha = 1$ ist die Wellenfunktion exponentiell lokalisiert. Der Übergang vom einen zum anderen Regime ist in Abbildung 7c zu sehen.

AUSBLICK

Die Anderson-Lokalisierung ist ein 1-Teilchen-Phänomen, das heißt es ist keine Wechselwirkung nötig. In Systemen mit starker Wechselwirkung (zum Beispiel

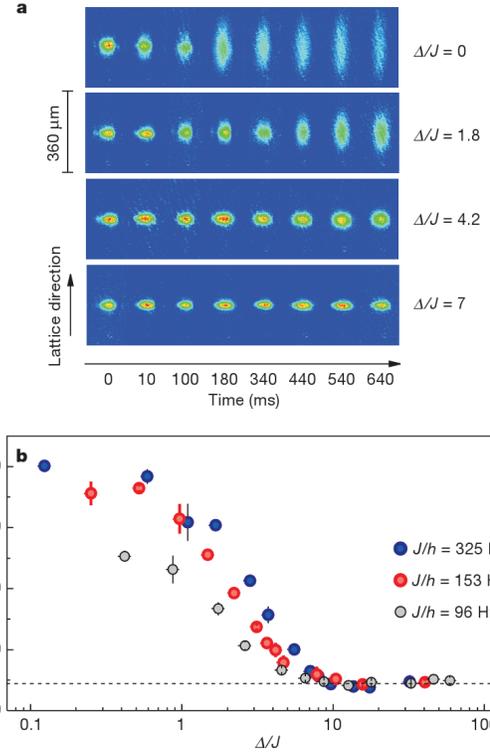


Abbildung 6. (a) Absorptionsoptionen des Bose-Einstein-Kondensats für verschiedene Δ/J und unterschiedliche Expansionszeiten. Für $\Delta/J \gtrsim 2$ tritt keine Diffusion auf und das Kondensat bleibt 600ms lokalisiert. (b) Größe des Kondensats bei fester Zeit für verschiedene J/h . Die gestrichelte Linie gibt die Anfangsgröße des Kondensats an. Das universelle Verhalten am Phasenübergang ist zu erkennen, der Übergang ist unabhängig von J/h .

in Festkörpern) kann keine Anderson-Lokalisierung beobachtet werden, da diese von der Wechselwirkung überlagert wird.

Die gemeinsame Behandlung der Wechselwirkung und der Unordnung stellt eine große Herausforderung in der theoretischen Physik dar und es sind noch viele Fragen offen. Experimente mit Bose-Einstein-Kondensaten können helfen diese Fragen aufzuklären, da die Wechselwirkung sehr genau kontrolliert werden kann.

Nimmt man die Wechselwirkung hinzu, so können neue Quantenphasen auftreten. Denkbar sind zum Beispiel Übergänge vom Mott-Regime in das Anderson-Regime. Auch hierzu wurden bereits erste Experimente durchgeführt [13].

Abbildung 8 zeigt ein Phasendiagramm des eindimensionalen Systems im quasiperiodischen Potential. Sowohl die Wechselwirkungsenergie als auch die Stärke des Zufallspotentials konnten dort variiert werden. Aufgetragen ist der Fit-Parameter α , der die verschiedenen Regime (Gauß, Anderson) charakterisiert.

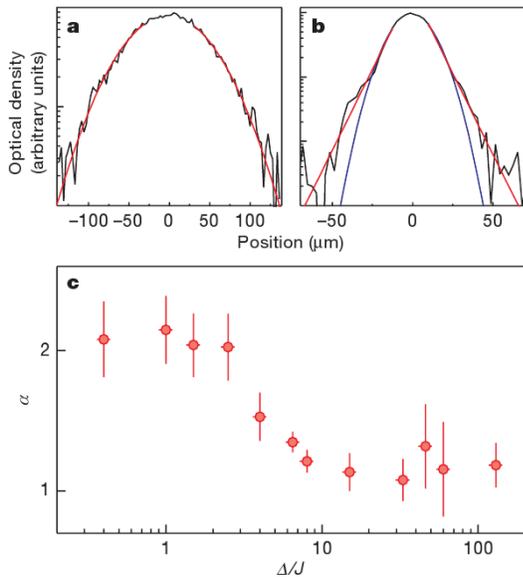


Abbildung 7. (a, b) Dichteprofile sowie Fitfunktion (rot) für $\Delta/J \approx 1$ (a) und $\Delta/J \approx 15$ (b). Blau: Gaußsche Fit-Funktion (c) Abhängigkeit des Fit-Parameters α der Funktion $\exp(-|x - x_0|/\xi)^\alpha$ für unterschiedliche Δ/J . Der Phasenübergang vom Gaußschen Regime ($\alpha = 2$) zum Anderson-Regime ($\alpha = 1$) ist zu erkennen.

ZUSAMMENFASSUNG

In gewissen zufälligen Potentialen kommt es zu einer Lokalisierung quantenmechanischer Teilchen. Die Charakteristik dieser sogenannten Anderson-Lokalisierung liegt in einer exponentiell abfallenden Wellenfunktion bzw. Dichte.

In drei Dimensionen tritt ein Phasenübergang bei einer kritischen Unordnungsstärke auf, der als Metall (de-

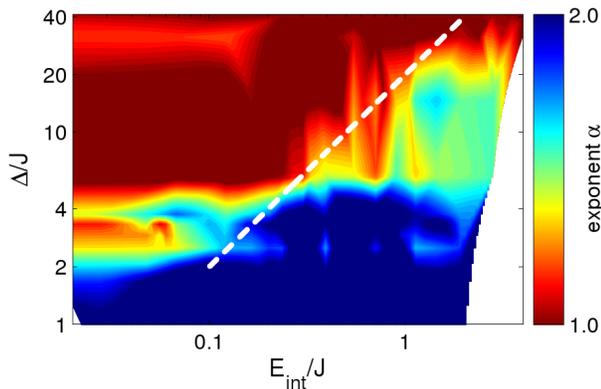


Abbildung 8. Phasendiagramm des Bose-Einstein-Kondensats im quasiperiodischen Gitters. Für große Wechselwirkungsenergien kann keine Lokalisierung mehr beobachtet werden. Es tritt ein Übergang von $\alpha = 1$ (Anderson) zu $\alpha = 2$ (Gauß) auf.

lokalisiert) – Isolator (lokalisiert) Übergang verstanden werden kann. Dies ist besonders interessant, da Metall-Isolator-Übergänge sonst durch die Wechselwirkung getrieben sind (vgl. Mott-Isolator).

Der Grund für die auftretende Lokalisierung liegt in der kohärenten Rückstreuung an den Störstellen im Potential. Dieser Effekt tritt auf, da die Wahrscheinlichkeit zur selben Störstelle zurückzukehren aufgrund kohärent überlagerter Umkehrpfade erhöht ist. Die Anderson-Lokalisierung ist somit ein 1-Teilchen Phänomen und tritt in verschiedenartigen Systemen auf.

Über theoretische Modelle, sowie Computersimulationen kann die wechselwirkungsfreie Anderson-Lokalisierung untersucht werden. Experimentell wurde die Anderson-Lokalisierung in verschiedenartigen Systemen beobachtet, darunter bei Ultraschall-Wellen, Mikrowellen, Licht und zuletzt auch bei ultrakalten Quantengasen bzw. Bose-Einstein-Kondensaten.

Das Zusammenspiel von Unordnung und Wechselwirkung ist bisher noch nicht komplett verstanden und stellt im Rahmen der theoretischen Physik eine Herausforderung dar.

Experimente mit Bose-Einstein-Kondensaten können in Zukunft Fragen in dieser Hinsicht beantworten, da in diesen Systemen die Wechselwirkung kontrolliert werden kann.

- [1] P. Anderson, *Physical Review* **109**, 1492 (1958)
- [2] J. Billy, V. Josse, Z. Zuo, A. Bernard, B. Hambrecht, P. Lugan, D. Clément, L. Sanchez-Palencia, P. Bouyer, and A. Aspect, *Nature* **453**, 891 (2008)
- [3] G. Roati, C. D’Errico, L. Fallani, M. Fattori, C. Fort, M. Zaccanti, G. Modugno, M. Modugno, and M. Inguscio, *Nature* **453**, 895 (2008)
- [4] R. Weaver, *Wave motion* **12**, 129 (1990)
- [5] R. Dalichaouch, J. Armstrong, S. Schultz, P. Platzman, and S. McCall, *Nature* **354**, 53 (1991)
- [6] D. Wiersma, P. Bartolini, A. Lagendijk, and R. Righini, *Nature* **390**, 671 (1997)
- [7] A. Ioffe and A. Regel, *Prog. Semicond* **4**, 237 (1960)
- [8] E. Abrahams, P. Anderson, D. Licciardello, and T. Ramakrishnan, *Physical Review Letters* **42**, 673 (1979)
- [9] M. Modugno, *New Journal of Physics* **11**, 033023 (2009)
- [10] E. Timmermans, P. Tommasini, M. Hussein, and A. Kerman, *Physics Reports* **315**, 199 (1999)
- [11] P. Lugan, A. Aspect, L. Sanchez-Palencia, D. Delande, B. Gremaud, C. Müller, and C. Miniatura, *Physical Review A* **80**, 23605 (2009)
- [12] L. Sanchez-Palencia and M. Lewenstein, Arxiv preprint arXiv:0911.0629(2009)
- [13] B. Deissler, M. Zaccanti, G. Roati, C. D’Errico, M. Fattori, M. Modugno, G. Modugno, and M. Inguscio, Arxiv preprint arXiv:0910.5062(2009)