2. Lagrange'sche Mechanik

Im folgenden wollen wir zeigen, dass die Newton'schen Gleichungen mit Hilfe eines variations Prinzip formuliert werden können: dem sogenannten „Hamilton'sche Prinzip der kleinsten Wirkung".

2.1 Euler-Lagrange Gleichung

Wir betrachten ein System von N-Teilchen mit den Koordinaten

$$q^i(t) \qquad i = 1 \dots 3N$$

in einem konservativen Kraftfeld

$$F^i(q^1 \dots q^{3N}, t) = -\frac{\partial}{\partial q^i} V(q^1 \dots q^{3N}, t)$$

Bem: · Ortsvektor $\vec{r}_j$ des j-ten Teilchens hat die Form

$$\vec{r}_j = \begin{pmatrix} q^{3j-2} \\ q^{3j-1} \\ q^{3j} \end{pmatrix}$$

und,

$$\vec{F}_j = \begin{pmatrix} F^{3j-2} \\ F^{3j-1} \\ F^{3j} \end{pmatrix}$$

die Kraft auf das Teilchen.

Die Newton'schen Gleichungen haben somit die Form

$$m_i \, \ddot{q}^i(t) = -\frac{\partial}{\partial q^i} V(q^1 \dots q^{3N}, t).$$

Den ersten Term können wir schreiben als partielle Ableitung der kinetischen Energie T

$$\begin{aligned} m_i \, \ddot{q}^i(t) &= \frac{d}{dt}\left(m_i \, \dot{q}^i\right) \\ &= \frac{d}{dt}\left[m_i \frac{\partial}{\partial \dot{q}^i}\left(\dot{q}^i\right)^2 \cdot \frac{1}{2}\right] \\ &= \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}^i} T \end{aligned}$$

mit der kinetischen Energie $T = \sum_i \frac{m_i}{2} \left(\dot{q}^i\right)^2$.

Wir definieren nun die Lagrange Funktion

$$L(q^1, \dots q^{3N}, \dot{q}^1 \dots \dot{q}^{3N}, t)$$

$$\equiv \sum_i \frac{m_i}{2} \left(\dot{q}^i\right)^2 - V(q^1 \dots q^{3N})$$

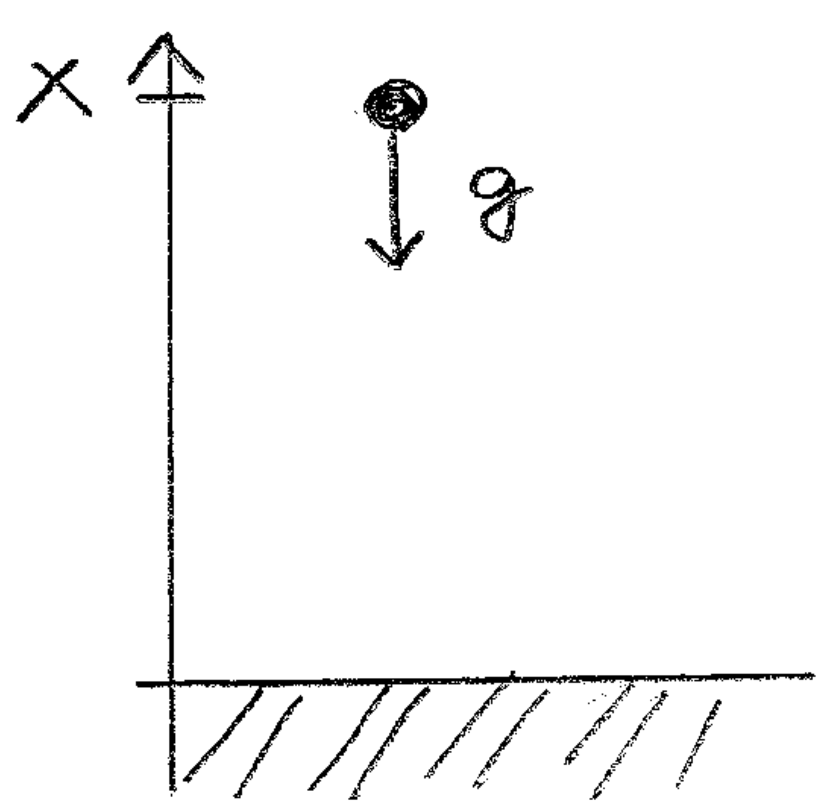
in kurzer Notation

$$L = T - V$$

Die Bewegungsgleichungen folgen somit aus den Euler-Lagrange Gleichungen

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0$$

<u>Bsp:</u>

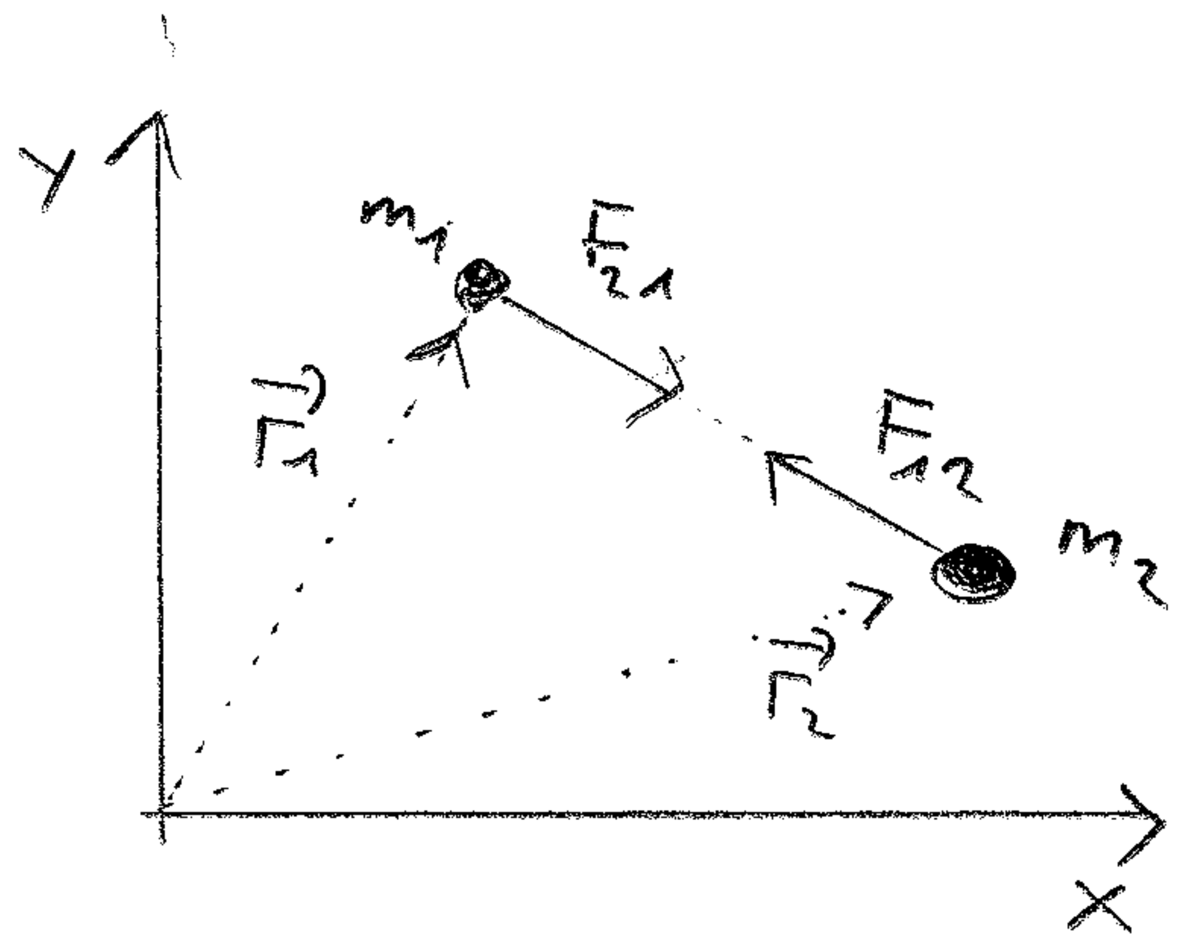


- Ein Körper mit Masse m im Gravitationsfeld der Erde
  - Koordinate x : Höhe oberhalb der Erdoberfläche
  - kinetische Energie $T = \frac{m}{2}\dot{x}^2$
  - Potentielle Energie : $V = g \cdot m x$
  - Die Lagrange Funktion hat die Form
    $$L(x,\dot{x}) = T - V = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - gmx$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{\partial L}{\partial x} = -gm$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$$

$$\Longrightarrow \quad 0 = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = m\ddot{x} + gm = 0$$



Bsp: • Zwei Teilchen mit Wechselwirkungs Potential $V(|r_1 - r_2|)$

• kinetische Energie $T = \frac{m_1}{2}\left(\frac{d}{dt}\vec{r}_1\right)^2 + \frac{m_2}{2}\left(\frac{d}{dt}\vec{r}_2\right)^2$

$$= \frac{m_1}{2}\dot{\vec{r}}_1^{\,2} + \frac{m_2}{2}\dot{\vec{r}}_2^{\,2}$$

• Potentielle Energie

$$V(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|)$$

$$\Longrightarrow L(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dot{\vec{r}}_1, \dot{\vec{r}}_2) = \frac{m_1}{2}\dot{\vec{r}}_1^{\,2} + \frac{m_2}{2}\dot{\vec{r}}_2^{\,2} - V(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|)$$

• $\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_1} = m_1 \dot{\vec{r}}_1 \qquad \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_2} = m_2 \dot{\vec{r}}_2$

• $\vec{F}_{21} = \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_1} = -\nabla_1 V(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|)$

$$= -\frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} \cdot V'(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|)$$

• $\vec{F}_{12} = \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_2} = -\nabla_2 V(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|)$

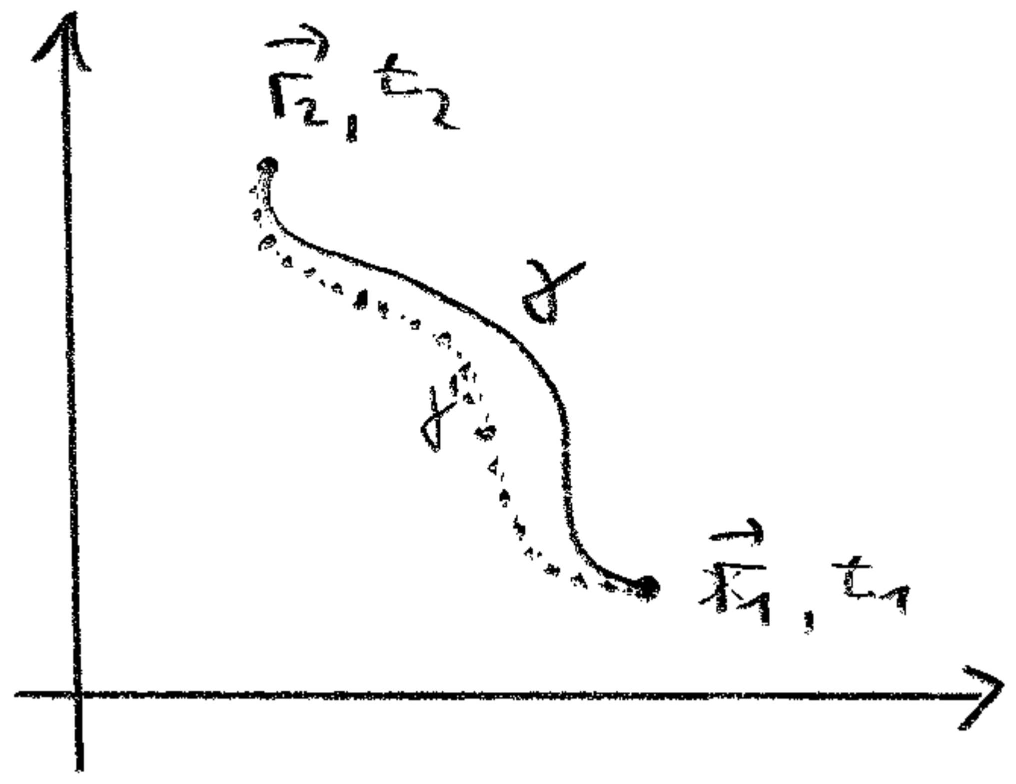
$$= -\frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} V'(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|) = -\vec{F}_{21}$$

$$\Longrightarrow \quad m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_1} = \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_1} = \vec{F}_{21}$$

$$m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_2} = \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_2} = \vec{F}_{12}$$

2.2 Variationsrechnung

Im folgenden etablieren wir die Mathematischen Methoden, die zum Verständnis von Hamilton's Variations Prinzip wichtig sind.



Wir betrachten Kurven γ in $\mathbb{R}^n$ mit der Parametrisierung

$$\gamma: \quad [t_1, t_2] \longrightarrow \mathbb{R}^n$$
$$t \longmapsto \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} q^1 \\ \vdots \\ q^n \end{pmatrix}$$

mit festen Anfangs $\vec{r}_1$ und Endpunkten $\vec{r}_2$

Das Integral

$$I(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} dt \; L(q^i, \dot{q}^i, t)$$

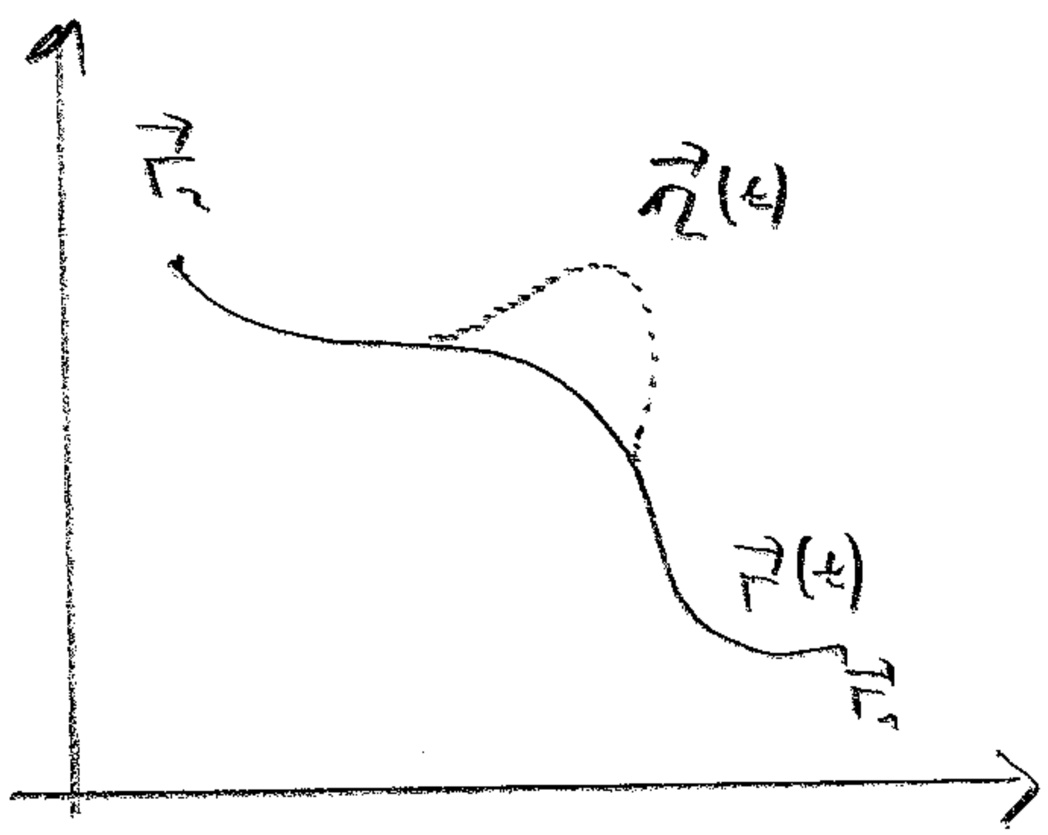
beschreibt ein Funktional, dass jeder Raumkurve γ eine Zahl $I(\gamma)$ zuordnet.

Wir sind jetzt interessiert, an den Bedingungen an die Kurve γ, damit $I(\gamma)$ extremal ist.

Dazu betrachten wir eine kleine Variation der Kurve

$$\gamma'(\alpha): \quad t \longmapsto \vec{r}(t) + \alpha\vec{\eta}(t) \equiv \vec{r}'(t)$$

$$q^i(t) + \alpha\eta^i(t) \equiv \tilde{q}^i(t)$$



mit fixierten Anfangs- und Endpunkten:

$$\eta^i(t_1) = \eta^i(t_2) = 0$$

Dies führt mittels dem Funktional auf eine neue Zahl

$$I[\gamma'(\alpha)] = \int_{t_1}^{t_2} dt\, L(q^i, \dot{q}^i, t).$$

Def: Die Kurve γ heisst extremal zu dem Funktional $I(\gamma)$, falls für alle Variationen $\eta^i(t)$ gilt

$$\frac{d}{d\alpha} I[\gamma'(\alpha)]\Big|_{\alpha=0} = 0$$

Einsetzen dieser Definition liefert

$$\frac{d}{d\alpha} I[\gamma(\alpha)]\Big|_{\alpha=0} = \int_{t_1}^{t_2} dt \, \frac{d}{d\alpha} L(q^i+\alpha\eta^i, \dot{q}^i+\alpha\dot{\eta}^i, t)\Big|_{\alpha=0}$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_i \left[\frac{\partial L}{\partial q^i}\eta^i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\dot{\eta}^i\right]$$

partielle Integration

$$= \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_i \left[\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right]\eta^i + \underbrace{\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\eta^i\Big|_{t_1}^{t_2}}_{=0}$$

$=0$ da Endpunkte fixiert

$$= \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_i \left[\frac{\partial}{\partial q^i}L(q^i, \dot{q}^i, t) - \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}^i}L(q^i, \dot{q}^i, t)\right]\eta^i(t)$$

Damit dieser Ausdruck verschwindet für alle Variationen $\eta^i(t)$, muss der Integrand selber verschwinden.

Theorem: Eine notwendige und hinreichende Bedingung, damit die Kurve $q^i(t)$ extremal zum Funktional $I(\gamma)$ ist, ist dass erfüllen der Euler-Lagrange gleichung

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}^i}L(q^i, \dot{q}^i, t) - \frac{\partial}{\partial q^i}L(q^i, \dot{q}^i, t) = 0$$

2.3 Hamilton's Prinzip der kleinsten Wirkung

Die Bewegung eines Systems von der Zeit t_1 nach t_2 ist so, dass die Wirkung

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt\, L$$

mit dem Lagrange $L = T - V$ extremal ist.

Bew: Aus der Variationsrechnung wissen wir, dass die extremale Kurve, die Euler-Lagrange Gleichungen erfüllt. Diese Gleichungen sind aber identisch zu den Newtonischen Bewegungsgleichungen.

Bem: Die Dimension der Wirkung S ist somit

$$[\text{Energie}] \times [\text{Zeit}]$$

$$= [\text{Impuls}] \times [\text{Länge}]$$

Mittels dem Hamiltonischen Prinzip sind die lokalen Bewegungsgleichungen durch ein globales Konzept der Extremalen Wirkung ersetzt worden.

Dies hat einige sehr markante Vorteile:

- Der Lagrange besteht aus Experimentellen zugänglichen Grössen:

  T : kinetische Energie

  V : Potentielle Energie

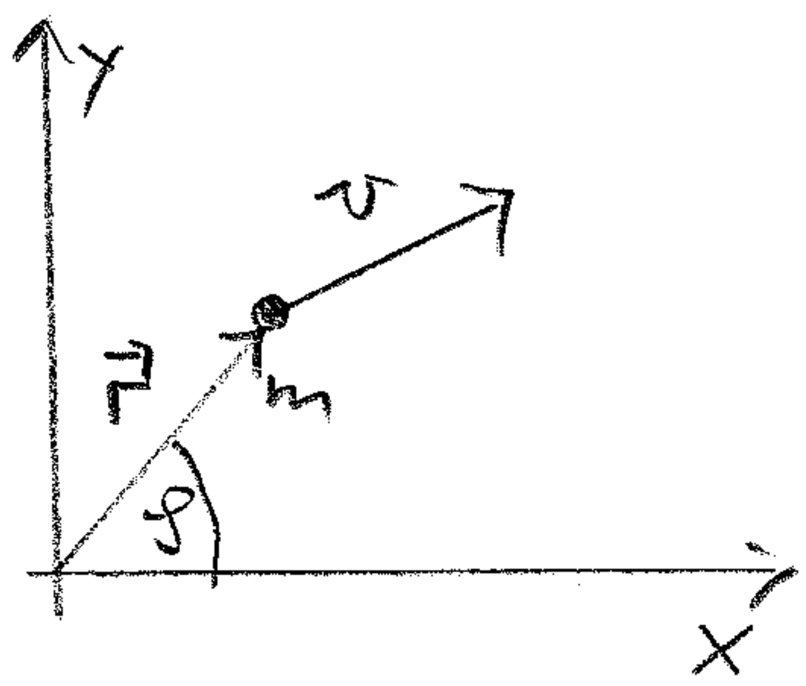
- Das Variationsprinzip ist invariant unter Koordinaten Transformationen

  $\Longrightarrow$ Es ist sehr einfach die Bewegungsgleichung in krummlinigen Koordinaten zu erhalten.

- Die Grössen $q^i(t)$ können beliebige verallgemeinerte Koordinaten sein, und müssen nicht die Einheit von Länge haben.

- Symmetrien und Erhaltungsgrössen sind im Lagrange Formalismus sehr elegant zu formulieren.

Bsp: Betrachte die kinetische Energie eines Teilchens in der Ebene



$$T = \frac{m}{2}\left[\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right]$$

und in kartesischen Koordinaten haben die verallgemeinerten Koordinaten die Form

$$q^1 = x$$
$$q^2 = y\,.$$

Wir können jetzt in Polarkoordinaten wechseln:

$$x = r\cos\varphi$$
$$y = r\sin\varphi$$

$$\Longrightarrow \quad T = \frac{m}{2}\left[\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right]$$

mit den verallgemeinerten Koordinaten

$$q^1 = r \qquad \Longrightarrow L(r,\varphi,\dot{r},\dot{\varphi}) = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right)$$
$$q^2 = \varphi$$

Es folgen die Bewegungsgleichungen in polar Koordinaten

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} = \frac{d}{dt} m\dot{r} - m r\dot{\varphi}^2$$

$$= m\ddot{r} - m r\dot{\varphi}^2 = 0$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = \frac{d}{dt} m r^2 \dot{\varphi} = 0$$

$$\Longrightarrow \quad p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m r^2 \dot{\varphi} = \text{const}$$

Es folgt sofort, dass p_φ eine Erhaltungsgrösse ist: Drehimpulserhaltung.

<u>Bem:</u>
- $q^i(t)$: verallgemeinerte Koordinaten
- $p_i(t) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}$: verallgemeinerte Impulse. $\equiv$ Kanonischer Impuls
- $\frac{\partial L}{\partial q^i}$: verallgemeinerte Kraft.

<u>Def:</u> Eine Koordinate q^i heisst zyklisch, wenn L nicht von q^i abhängt, d.h.

$$\frac{\partial}{\partial q^i} L = 0$$

<u>Theorem:</u> Für zyklische Koordinaten ist der dazu gehörige kanonische Impuls eine Erhaltungsgrösse

$$\underbrace{\frac{\partial L}{\partial q^i} = 0}_{\text{Symmetrie}} \quad \Longrightarrow \quad \frac{d}{dt} p_i = 0$$

$$\underbrace{\Longrightarrow \quad p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} = \text{const.}}_{\text{Erhaltungssatz}}$$

<u>Bsp:</u> Teilchen in der Ebene in einem zentral Potential $V(\sqrt{x^2+y^2})$

$\longrightarrow$ Polar Koordinaten

$\longrightarrow$ $L(r, \varphi, \dot{r}, \dot{\varphi}) = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - V(r)$

$\longrightarrow$ φ ist zyklisch

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m r^2 \dot{\varphi} = \text{const.}$$

⌈ Drehimpuls: $L_z = m(x\dot{y} - y\dot{x})$

$$= m r^2(\cos^2\varphi\, \dot{\varphi} + \sin^2\varphi\, \dot{\varphi}) = m r^2 \dot{\varphi} = p_\varphi$$ ⌋

Bem: Unterscheiden sich zwei Lagrange Funktionen L und L' durch eine totale Ableitung, d.h.:

$$L' = L + \frac{d}{dt} F$$

so führt dies auf dieselben Bewegungsgleichungen

⌜ Die Wirkung der beiden Lagrange Funktionen unterscheidet sich nur um eine triviale Konstante

$$S'[\gamma] = \int_{t_1}^{t_2} dt\, L' = \int_{t_1}^{t_2} dt \left[L + \frac{d}{dt} F \right]$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} dt\, L + \underbrace{F \Big|_{t_1}^{t_2}}_{\text{unabhängig vom Weg } \gamma} = S[\gamma] + \text{const}$$

Somit ist γ sowohl extremal zu L wie L' ⌟

2.4 Lorentz Kraft

Aus dem Experimenten wissen wir, dass ein geladenes Teilchen im el. Feld $\vec{E}$ und magnetische Feld $\vec{B}$ die Lorentz Kraft erfährt

$$\vec{F} = e\vec{E} + e\frac{\vec{v}}{c} \wedge \vec{B}$$

Diese elektrodynamischen Felder, lassen sich mittels Potentialen schreiben (siehe TP: 3)

$$\vec{E} = -\nabla\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{A} \qquad : \phi \text{ skalar Potential}$$

$$\vec{B} = \mathrm{rot}\,\vec{A} \qquad : A \text{ Vektor Potential}$$

Die Lagrange Funktion hat dann die Form

$$L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) = \frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^2 - e\Big[\underbrace{\phi(\vec{r},t) - \frac{\dot{\vec{r}}}{c}\cdot\vec{A}(\vec{r},t)}_{\text{Eichabhängig}}\Big]$$

Übungs Aufgabe: Zeige, dass die Euler-Lagrange Gleichungen die Lorentz Kraft ergeben.

Der kanonische Impuls hat somit die Form

$$\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{x}}} = m\dot{\vec{x}} + \frac{e}{c}\vec{A}$$

kanonischer Impuls
keine Messgrösse

kinetischer Impuls
Messgrösse

Die Potentiale ϕ, A sind nicht eindeutig, sondern lassen die Eichtransformationen die Felder $\vec{E}$ und $\vec{B}$ invariant

$$\vec{A} \longrightarrow \vec{A}' = \vec{A} + \nabla\lambda$$

$$\phi \longrightarrow \phi' = \phi - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\lambda$$

λ : skalar Feld

Der Lagrange hat unter einer Eichtransformation die Form

$$L \longrightarrow L' = L + \underbrace{\frac{e}{c}\frac{d}{dt}\lambda(\vec{r},t)}_{\text{totale Ableitung}}$$

$\Longrightarrow$ Eichtransformationen lassen die Bewegung invariant

2.5 Noether Theorem

Wir sind jetzt ganz allgemein einen Zusammenhang zwischen Symmetrien und Erhaltungsgrössen aufzustellen.
Einen ersten Zusammenhang haben wir bereits für zyklische Koordinaten gesehen.

Wir betrachten eine kontinuierliche Schar von Koordinaten Transformationen

$$h_s^i : \quad q^i \longrightarrow \tilde{q}^i = h_s^i(q^i)$$
$$\dot{q}^i \longrightarrow \dot{\tilde{q}}^i = \sum_j \frac{\partial h_s^i}{\partial q^j} \cdot \dot{q}^j$$

Bsp: • Translationen:

$$q^i \longrightarrow \tilde{q}^i = q^i + s\, a^i$$
$$\dot{q}^i \longrightarrow \dot{\tilde{q}}^i = \dot{q}^i$$

• Rotationen:

Rotation um z-Achse mit Winkel s

$$\vec{r} \longrightarrow \vec{r}\,' = R(s)\,\vec{r} = \begin{pmatrix} \cos s & \sin s & 0 \\ -\sin s & \cos s & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q^1 \\ q^2 \\ q^3 \end{pmatrix}$$

$$\dot{\vec{r}} \longrightarrow \dot{\vec{r}}\,' = R(s)\,\dot{\vec{r}}$$

Diese Schar von Koordinaten Transformationen ist eine Symmetrie des Systems, wenn sie den Lagrange invariant lassen, d.h.

$$L(\tilde{q}^i, \dot{\tilde{q}}^i, t) = L(q^i, \dot{q}^i, t) \qquad \text{für alle } s$$

$$\Longrightarrow \frac{d}{ds} L(\tilde{q}^i, \dot{\tilde{q}}^i, t) = 0$$

Noether Theorem: Für eine Symmetrie h_s^i, gibt es eine Erhaltungsgrösse von der Form

$$I(q^i, \dot{q}^i) = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \frac{d}{ds} h_s^i(q^i) \Big|_{s=0}$$

Bew: Falls $q^i(t)$ eine Bewegungskurve ist, so ist $\tilde{q}^i(t)$ ebenfalls eine Lösung der Euler-Lagrange Gleichungen, da L invariant ist.

Somit gilt

$$0 = \frac{d}{ds} L(\tilde{q}^i, \dot{\tilde{q}}^i, t) = \sum_i \Big[\frac{\partial L}{\partial \tilde{q}^i} \cdot \frac{d}{ds} \tilde{q}^i + \frac{\partial L}{\partial \dot{\tilde{q}}^i} \frac{d}{ds} \dot{\tilde{q}}^i \Big]$$

Setzte Bewegungs Gleichung ein

$$0 = \sum_i \left[\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) \cdot \frac{d}{ds} \tilde{q}^i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \underbrace{\frac{d}{ds} \dot{\tilde{q}}^i}_{\frac{d}{dt}\left(\frac{d}{ds}\tilde{q}^i\right)} \right]$$

$$= \sum_i \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \cdot \underbrace{\frac{d}{ds} \tilde{q}^i}_{\frac{d}{ds} h_s^i(q^i)} \right)$$

$$= \frac{d}{dt} \left[I(q^i, \dot{q}^i) \right] = 0 \implies I(q^i, \dot{q}^i) = \text{const.}$$

$\blacksquare$

Bem: • Translations Symmetrie:

Wir betrachten die Symmetrie

$$\vec{r}_i \longrightarrow \vec{r}_i + s\vec{a}$$ beliebiger translations vektor

$$\dot{\vec{r}}_i \longrightarrow \dot{\vec{r}}_i$$

$$\implies \frac{d}{ds}\left(\vec{r}_i + s\vec{a}\right) = \vec{a}$$

$$\implies \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_i} = \vec{p}_i = m\dot{\vec{r}}_i$$

$$\implies \sum_i \vec{p}_i \cdot \vec{a} = \left(\sum_i \vec{p}_i\right) \cdot \vec{a} = \vec{P}_{tot} \cdot \vec{a} = \text{const}$$

$\implies$ Die Erhaltung des totalen Impulses

$$P_{tot} = \sum_i \vec{p}_i = \sum_i m_i \dot{r}_i = \text{const}$$

folgt aus Translations Symmetry.

• Rotations Symmetrie:

Für kleine Rotationswinkel s können wir die Rotation um die Achse $\vec{n}$ schreiben als

$$\vec{r}_i \longrightarrow \vec{r}_i + s\,\vec{n} \wedge \vec{r}_i$$

$$\dot{\vec{r}}_i \longrightarrow \dot{\vec{r}}_i + s\,\vec{n} \wedge \dot{\vec{r}}_i$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{d}{ds} h^s = \vec{n} \wedge \vec{r}_i$$

Das Noether Theorem ergibt die Erhaltungsgrösse

$$\sum_i \vec{p}_i \cdot (\vec{n} \wedge \vec{r}_i) = \Big(\sum_i \vec{r}_i \wedge \vec{p}_i\Big) \cdot \vec{n}$$

$$= \vec{L}_{tot} \cdot \vec{n}$$ für alle Rotations Achsen

$\Longrightarrow$ Die Erhaltung des Drehimpulses

$$\vec{L}_{tot} = \sum_i \vec{r}_i \wedge \vec{p}_i = \text{const}$$

erfolgt aus Rotations Symmetrie.

Übungsaufgabe: Wenn die Rotationssymmetrie nur noch um die z-Achse gegeben ist, welcher Teil des Drehimpulses ist noch erhalten?

- Galilei Boost: $\vec{r}_i \longrightarrow \vec{r}_i + s\vec{v}t$

$$\dot{\vec{r}}_i \longrightarrow \dot{\vec{r}}_i + s\vec{v}$$

Der Lagrange ist jetzt nicht mehr erhalten, sondern erhält eine totale Ableitung

$$L \longrightarrow L + \sum_i \left[\frac{m_i}{2} s^2 \vec{v}^2 + m_i \dot{\vec{r}} \vec{v} s\right]$$

$$= L + \frac{d}{dt}\Big(\underbrace{\sum_i \frac{m_i}{2} s^2 \vec{v}^2 t + m_i s \vec{r}\cdot\vec{v}}_{F(q^i, \dot{q}^i, s)} \Big)$$

Die Erhaltungsgrösse hat dann die Form

$$I(q^i, \dot{q}^i) = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \cdot \frac{d h_s^i(q^i)}{ds} - \frac{\partial}{\partial s} F(q^i, \dot{q}^i)\Big|_{s=0}$$

Somit folgt der Schwerpunktsatz

$$\sum_i \vec{p}_i \cdot \vec{v} \cdot t - \sum_i m_i \vec{r}_i \cdot \vec{v}$$

$$= \underbrace{\Big(\sum_i \vec{p}_i t - \sum_i m \vec{r}_i\Big)}_{\text{Erhaltungsgrösse}} \cdot \vec{v} = \text{const}$$

Energie Erhaltung:

zuletzt betrachten wir noch die Energie erhaltung, die aus der homogenität in der Zeit folgt:

$$t \longrightarrow t + a$$

$$L \longrightarrow L' = L$$

$\Longrightarrow$ L ist nicht nicht explizit zeitabhängig

$$L(q^i, \dot{q}^i, \cancel{t}) \longrightarrow \frac{\partial}{\partial t} L = 0$$
$$= L(q^i, \dot{q}^i)$$

Es folgt

$$\frac{d}{dt} L(q^i, \dot{q}^i) = \sum_i \frac{\partial L}{\partial q^i} \cdot \dot{q}^i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \cdot \ddot{q}^i$$

$$= \sum_i \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) \dot{q}^i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \left(\frac{d}{dt} \dot{q}^i \right)$$

$$= \frac{d}{dt} \left(\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \dot{q}^i \right)$$

$$\Longrightarrow \frac{d}{dt} \Big(\underbrace{\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \dot{q}^i - L(q^i, \dot{q}^i)}_{\equiv H} \Big) = 0$$

Die Energie

$$H = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \dot{q}^i - L(\dot{q}^i, q^i)$$

ist eine Erhaltungsgrösse, die aus Translations Invarianz in der Zeit folgt.

Bem: Für geschwindigkeits unabhängiges Potential $V(q^i)$ gilt

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i}$$

$$\Rightarrow \quad H = \underbrace{\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \dot{q}^i}_{2T} - L = 2T - T + V$$

$$= T + V$$

Somit haben wir jede Symmetrie der Galilei Gruppe eine Erhaltungsgrösse gefunden

$$\begin{array}{ccc} \text{Galilei Gruppe} & \text{Symmetrie} & \text{10 Erhaltungs} \\ \text{10 kontinuierliche} & \longleftrightarrow & \text{grössen} \\ \text{Parameter} & \text{unter Galilei Transformationen} & \end{array}$$