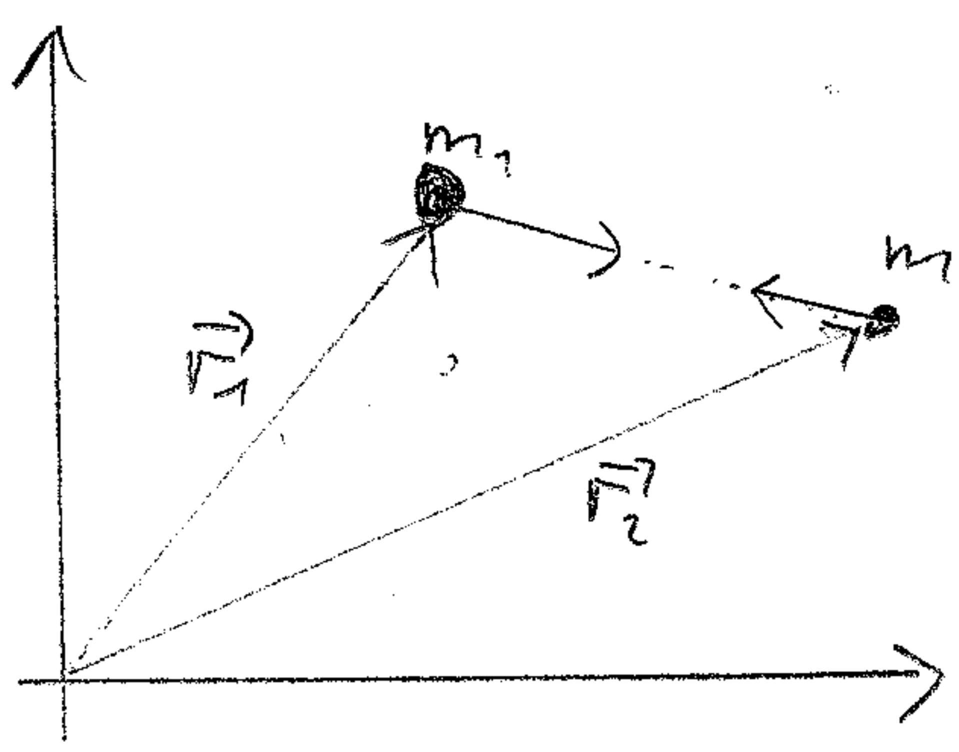
3. Zweikörper Problem mit Zentralkraft

Als Anwendung des Lagrange Formalismus, untersuchen wir zwei wechselwirkende Körper mit Massen m_1 und m_2, wobei das Potential rotationssymmetrisch ist.

Unter Benutzung der Erhaltungssätze können wir dieses Problem exakt lösen.



Der Lagrange hat somit die Form

$$L(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dot{\vec{r}}_1, \dot{\vec{r}}_2) = \frac{m_1}{2}\dot{\vec{r}}_1^{\,2} + \frac{m_2}{2}\dot{\vec{r}}_2^{\,2} - V(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|)$$

Somit haben wir einen 6-dimensionalen Konfigurationsraum

3.1. Reduktion auf 1-Teilchen Problem

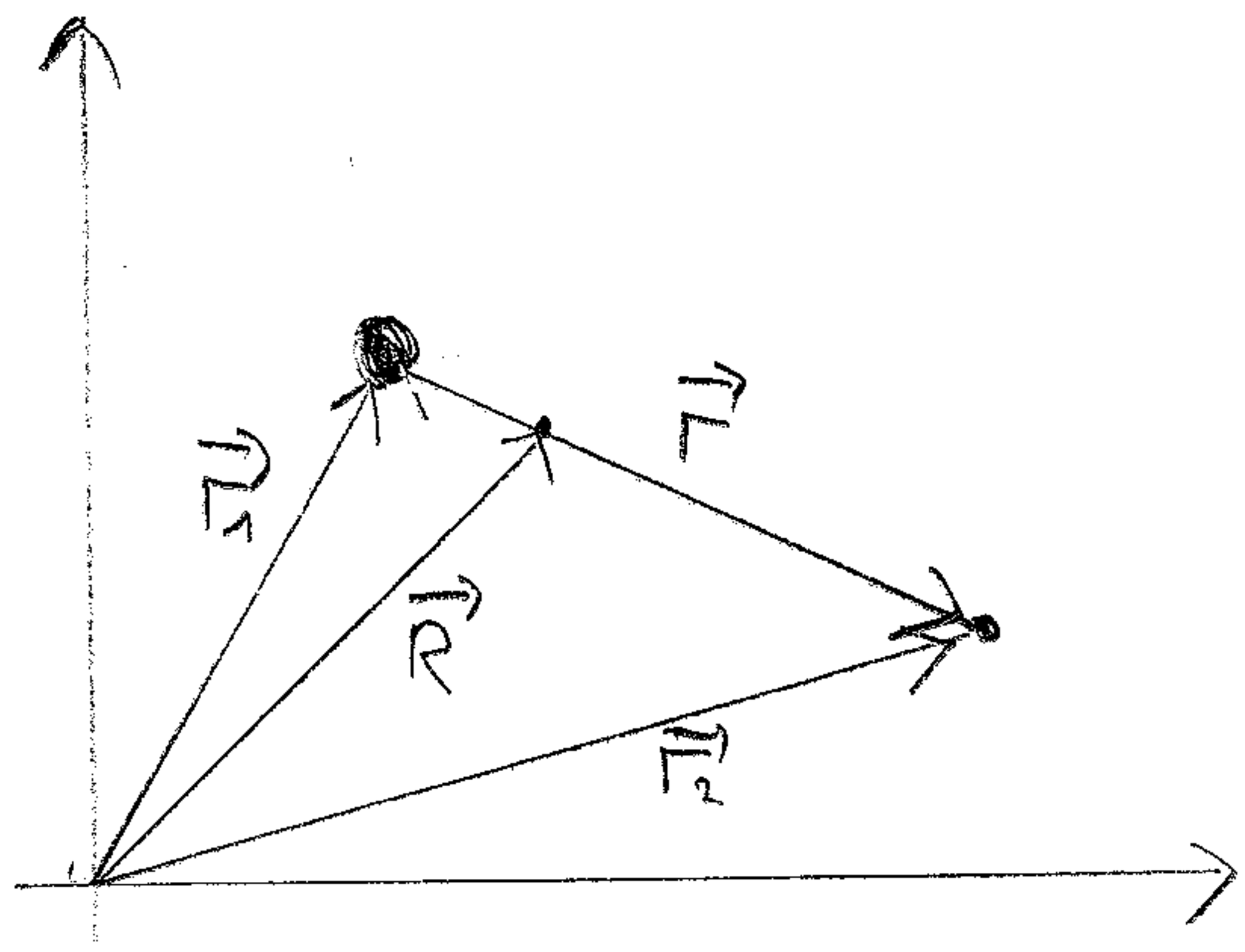
Dank der Impulserhaltung und dem Schwerpunktsatz, wissen wir, dass der Schwerpunkt einer trivialen Bewegung folgt. Dies können wir explizit sehen durch einführen von Schwerpunkts $\vec{R}$ und relativ $\vec{r}$ Koordinaten:

$$R = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} \qquad \vec{r}_1 = \vec{R} - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r}$$

$$r = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \qquad \vec{r}_2 = \vec{R} + \frac{m_1}{m_2 + m_1} \vec{r}$$

$$\Longrightarrow T = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{\vec{R}}^2 + \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\dot{\vec{r}}^2$$

· reduzierte Masse $\mu = \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$



Der Lagrange reduziert sich somit

$$L(\vec{R}, \vec{r}, \dot{\vec{R}}, \dot{\vec{r}}) = \frac{m_1+m_2}{2} \dot{\vec{R}}^2 + \frac{\mu}{2} \dot{\vec{r}}^2 - V(|\vec{r}|)$$

$\vec{R}$: zyklische Koordinate $\quad \vec{P} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{R}}} = (m_1+m_2) \dot{\vec{R}}$

(Impuls Erhaltung) $\quad = \text{const.} = (m_1+m_2) \vec{v}$

$$\vec{R} = \vec{R}_0 + \vec{v} \cdot t$$

Wir erhalten somit ein effektives 1 Teilchen Problem mit Koordinate $\vec{r}$ und der effektiven Masse μ.

$\Longrightarrow$ Das Problem hat sich um 3-Freiheitsgrade reduziert

Wir fokussieren uns somit nur noch auf den Lagrange

$$L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}) = \frac{\mu}{2} \dot{\vec{r}}^2 - V(|\vec{r}|)$$

3.2 Integration der Bewegungsgleichung

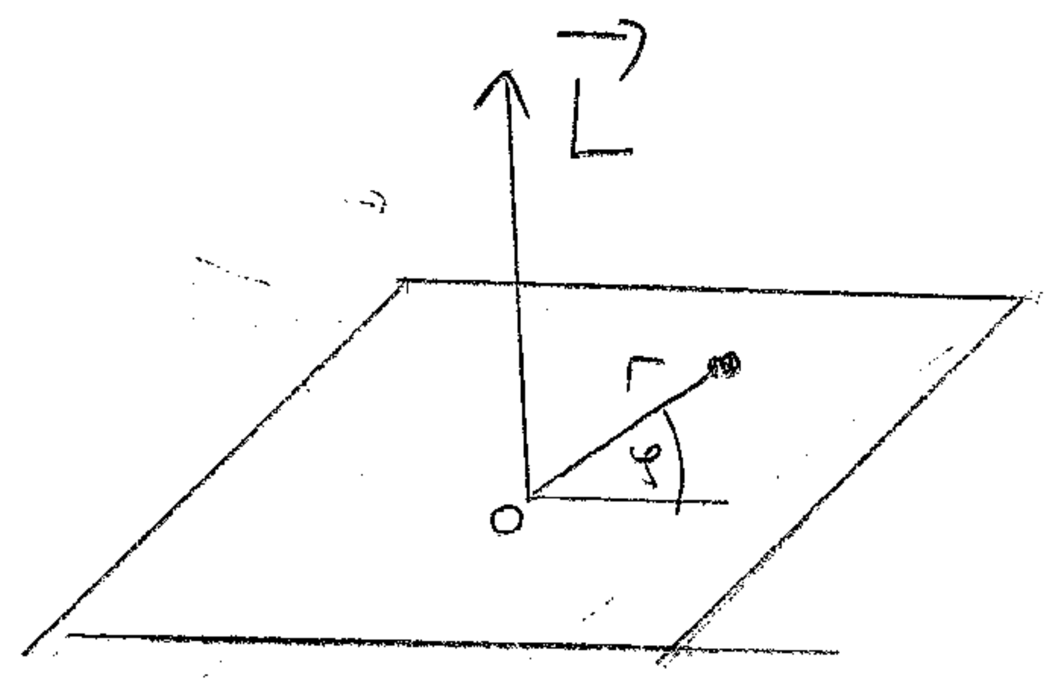
Da das Potential $V(|\vec r|)$ rotationssymmetrisch ist, haben wir der Erhaltung des Drehimpulses

$$\vec L = \vec r \wedge \vec p = \text{const} \qquad \vec p = \mu \dot{\vec r}$$

Somit ist $\vec r(t)$ immer senkrecht zu $\vec L$.

$$\vec r \cdot \vec L = \vec r(\vec r \wedge \vec p) = \vec p \cdot (\underbrace{\vec r \wedge \vec r}_{=0}) = 0$$

Also wählen wir ein Koordinaten System mit der z-Achse entlang $\vec L$ und führen in der Ebene Polar Koordinaten ein.



__Bem:__ Falls $\vec L = 0$ ist bricht die obige Argumentation zusammen. Dann ist die Bewegung aber entlang einer Geraden durch den Ursprung und ist für $\varphi(t) = 0$ im obigen Fall enthalten.

In polar Koordinaten haben wir jetzt

$$L(r, \varphi, \dot{r}, \dot{\varphi}) = \frac{1}{2}\mu\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right) - V(r)$$

Die Koordinate φ ist jedoch zyklisch und die Erhaltungsgrösse

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \mu r^2 \dot{\varphi} \equiv l$$

Die Drehimpuls erhaltung eliminiert somit 2 Koordinaten:

- Richtung von $\vec{L}$ ist erhalten

$$\Longrightarrow \text{ Bewegung in Ebene } (r, \varphi)$$

- Betrag von $\vec{L}$ ist erhalten

$$\Longrightarrow |\vec{L}| = p_\varphi = \mu r^2 \dot{\varphi} = l$$

Es bleibt ein 1-dimensionales Problem zu lösen.

Bem: Die Erhaltung von p_φ ist equivalent zum 2. Kepler'schen Gesetz.

Das verbleibende Problem können wir mittels Energieerhaltung formal lösen

$$E = \frac{\mu}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2 \underbrace{\dot{\varphi}^2}_{}\right) + V(r)$$

Drehimpulserhaltung
$p_\varphi = \ell = \mu r^2 \dot{\varphi}$

$$= \frac{\mu}{2}\dot{r}^2 + \underbrace{\frac{\ell^2}{2\mu r^2} + V(r)}_{}$$

$U(r)$: effektives 1d Potential

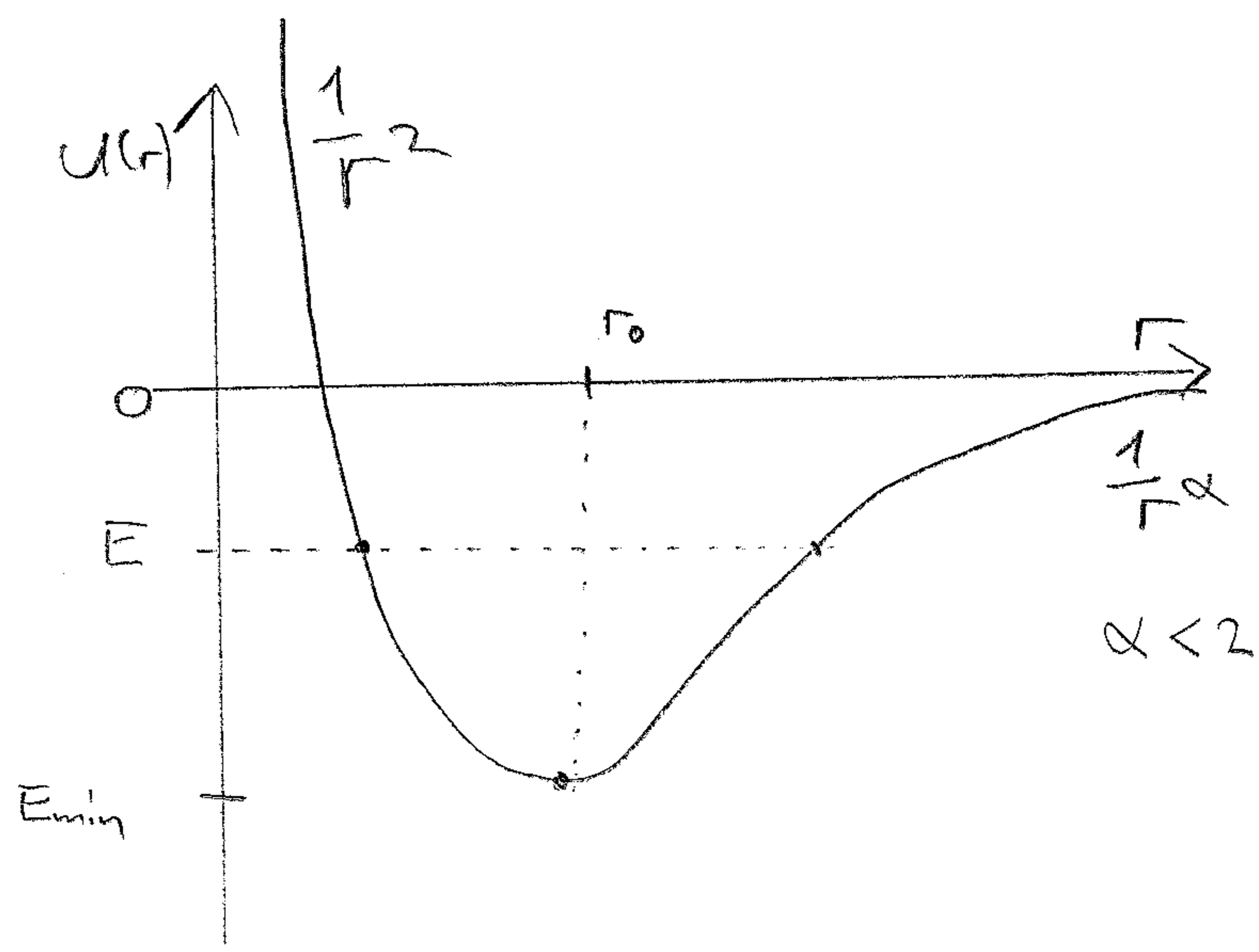
Die Gleichung verhält sich wie ein 1D Teilchen in einem Potential

$$U(r) = \frac{\ell^2}{2\mu r^2} + V(r)$$

zentrifugal Barriere

- $E > 0$: Streulösungen
- $E < 0$: gebundene Zustände zwischen den Umkehrpunkten
- $E = E_{min}$: $\dot{r} = 0$, $r = r_0$

Kreisbahnen



Betrachten wir jetzt den Teil der Trajektorie mit $\dot{r} > 0$ (auslaufendes Teilchen), so gilt

$$\dot{r}^2 = \frac{2}{\mu}\left(E - U(r)\right)$$

$$\Longrightarrow \quad \dot{r} = \sqrt{\frac{2}{\mu}}\sqrt{E - U(r)}$$

positives Vorzeichen da auslaufend

Mit standard Tricks zur Lösung von Diff. gl.

$$t - t_0 = \int dr \sqrt{\frac{\mu}{2}} \frac{1}{\sqrt{E - U(r)}}$$

Falls wir das Integral berechnen können und die Funktion nach $r(t)$ auflösen

$\Longrightarrow$ exakte Lösung des Problem.

Das Integral hat jedoch nur für wenige Werte von $V(r)$ eine geschlossene Form.

Analog gilt für die Bahntrajektorie $\varphi(r)$

$$\frac{d}{dr}\varphi = \dot{\varphi}\frac{dt}{dr} = \frac{l}{\mu r^2}\frac{1}{\dot{r}}$$

$\dot{\varphi} = \frac{l}{\mu r^2}$: Drehimpulserhaltung

$$= \frac{l}{\mu r^2}\sqrt{\frac{\mu}{2}}\frac{1}{\sqrt{E-U(r)}}$$

$$\Longrightarrow \varphi - \varphi_0 = \frac{l}{\sqrt{2\mu}}\int dr\,\frac{1}{r^2}\frac{1}{\sqrt{E-U(r)}}$$

und haben somit auch für die Bahntrajektore eine formale Lösung gefunden.

Qualitative lässt sich jedoch bereits viel über die Bahn aussagen, durch Analyse des effektiven Potentials.

- $V(r)$ dominiert über $\frac{1}{r^2}$ für $r \to \infty$
- $\frac{1}{r^2}$ dominiert über $V(r)$ für $r \to 0$

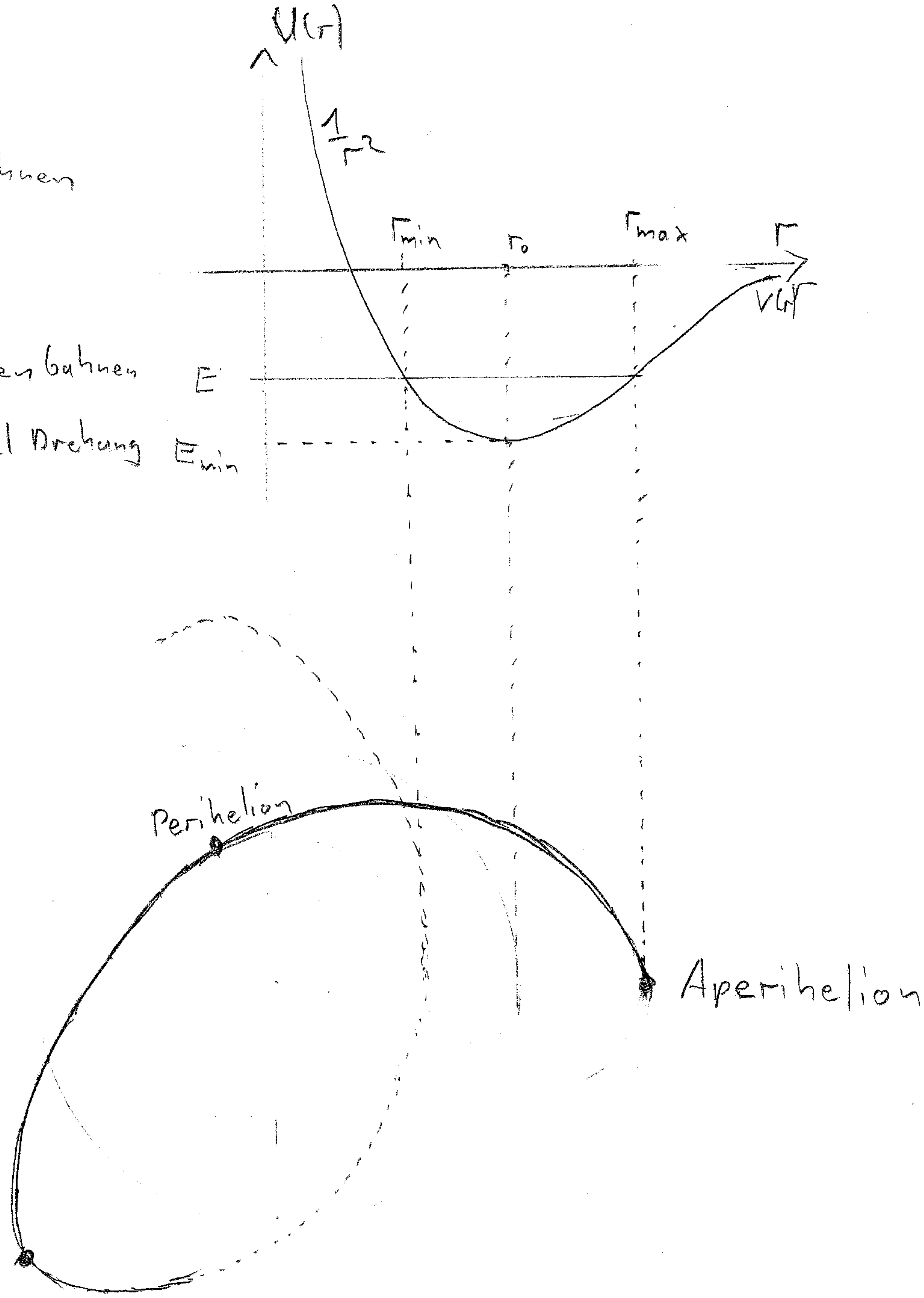
$E = E_{min}$:

Kreisbahnen

$E < 0$:

i.A. Rosettenbahnen

mit Perihel Drehung



Für eine Oszillation von r, keinen ganzen Winkel in $\varphi \neq \frac{2\pi m}{n}$ $\Longrightarrow$ Bedingung für geschlossene Bahnen

$V(r) = -\frac{1}{r}$ oder $V(r) = r^2$

3.3 Gravitationspotential

Das Potential hat die Form

$$V(r) = -\frac{k}{r}$$

$$U(r) = \frac{l^2}{\mu r^2} - \frac{k}{r} \quad : \text{effektives Potential}$$

und für die Bahntrajektorie folgt

$$\varphi - \varphi_0 = \frac{l}{\sqrt{2\mu}} \int \frac{dr}{r^2} \frac{1}{\sqrt{E - U(r)}}$$

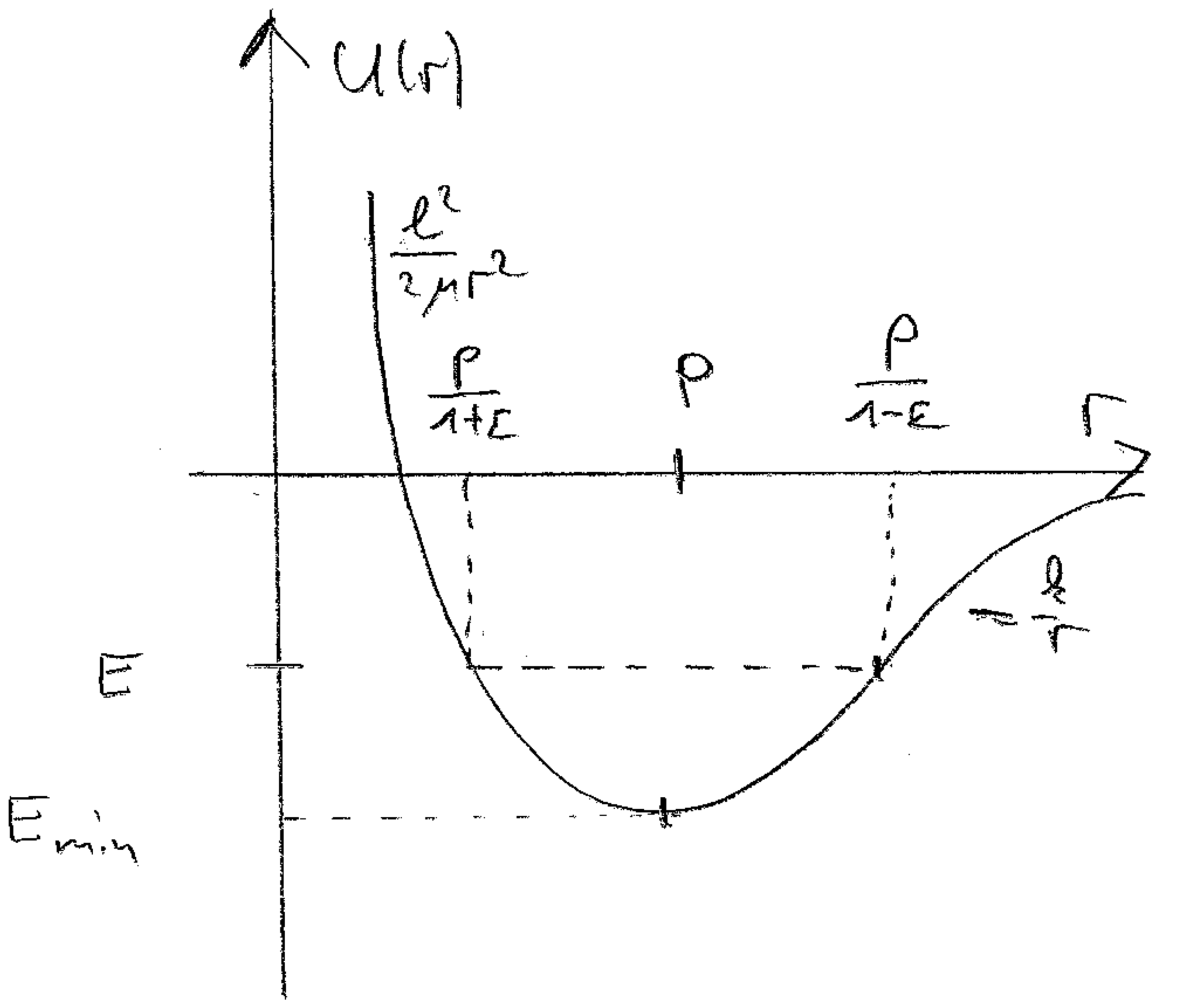
$$\underset{\underline{\underline{dx = -\frac{dr}{r^2}}}}{x = \frac{1}{r}} \; - \int dx \frac{1}{\sqrt{\frac{2\mu E}{l^2} + \frac{2\mu k}{l^2} x - x^2}}$$

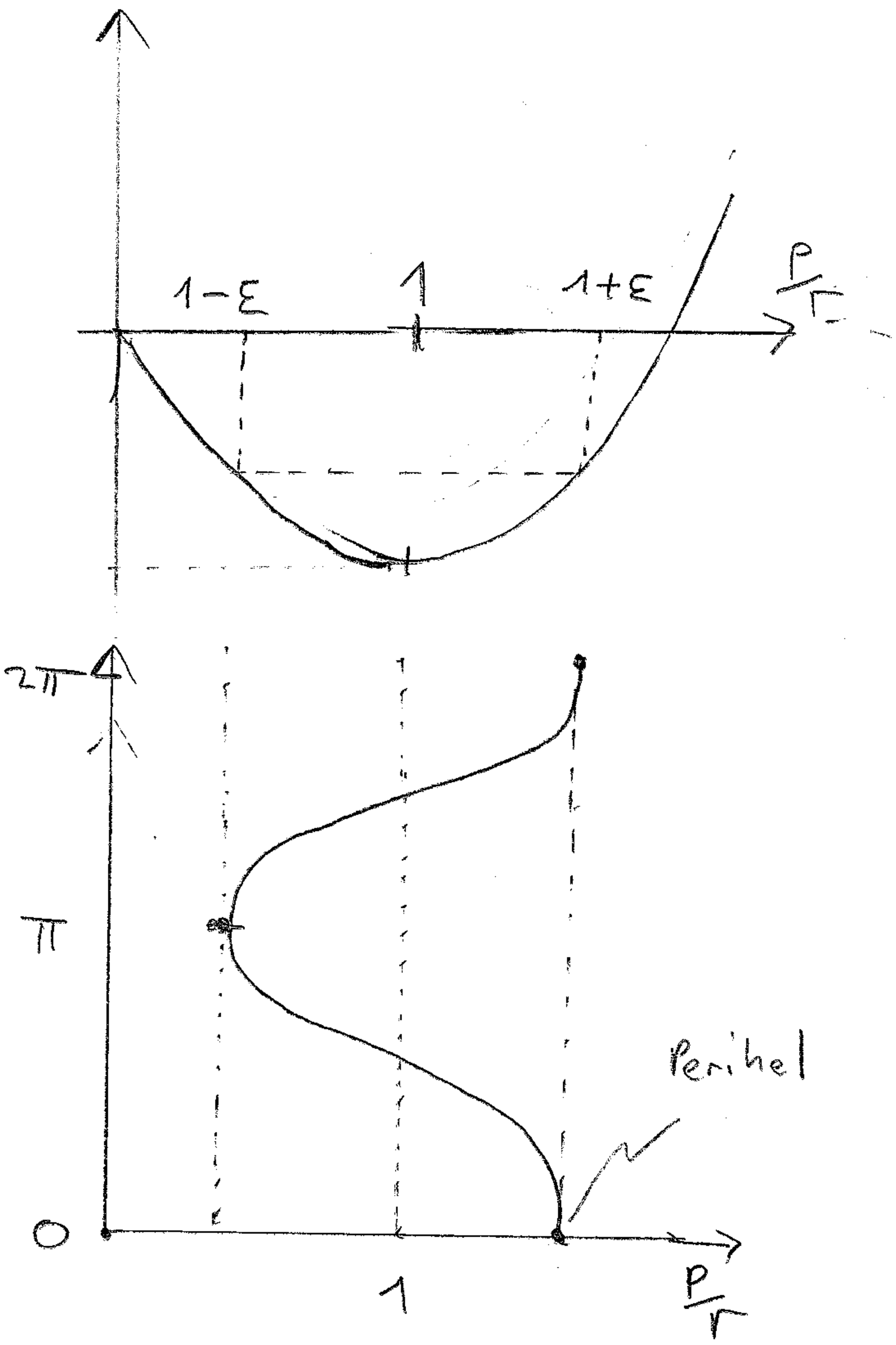
$$= \arccos \frac{\frac{l^2 x}{\mu k} - 1}{\sqrt{1 + \frac{2El^2}{mk^2}}}$$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{\frac{p}{r} = 1 + \varepsilon \cos(\varphi - \varphi_0)}$$

$$p = \frac{l^2}{\mu k}$$

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2El^2}{\mu k^2}}$$





- $p = r(E_{min})$: Abstand mit minimaler Energie
- $E_{min} = -\frac{mk^2}{2l^2}$
- ε : Abweichung von Kreisbahn

$\Rightarrow$ Bahnkurven sind Kegelschnitte

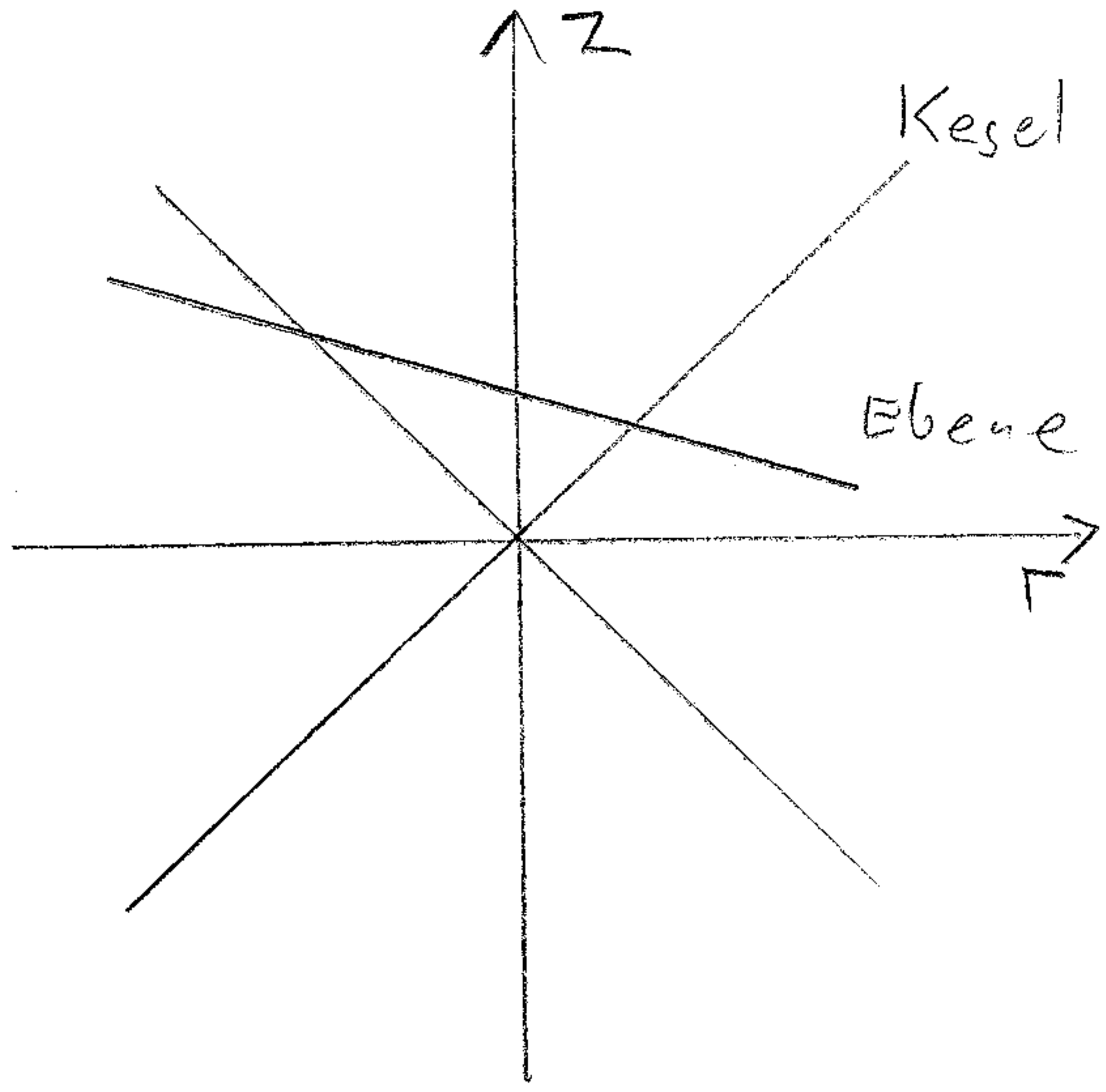
$E > 0 \Rightarrow \varepsilon > 1$: Hyperbel   Streuzustand

$E = 0 \Rightarrow \varepsilon = 1$: Parabel   Streuzustand

$E_{min} < E < 0 \Rightarrow 0 < \varepsilon < 1$: Ellipsen   gebundene Zustände

$E = E_{min} \Rightarrow \varepsilon = 0$: Kreisbahn

$E < E_{min} \rightarrow$ keine Lösungen



Rep: · Kegelschnitte

· Kegel: $z = \sqrt{x^2+y^2} = r$

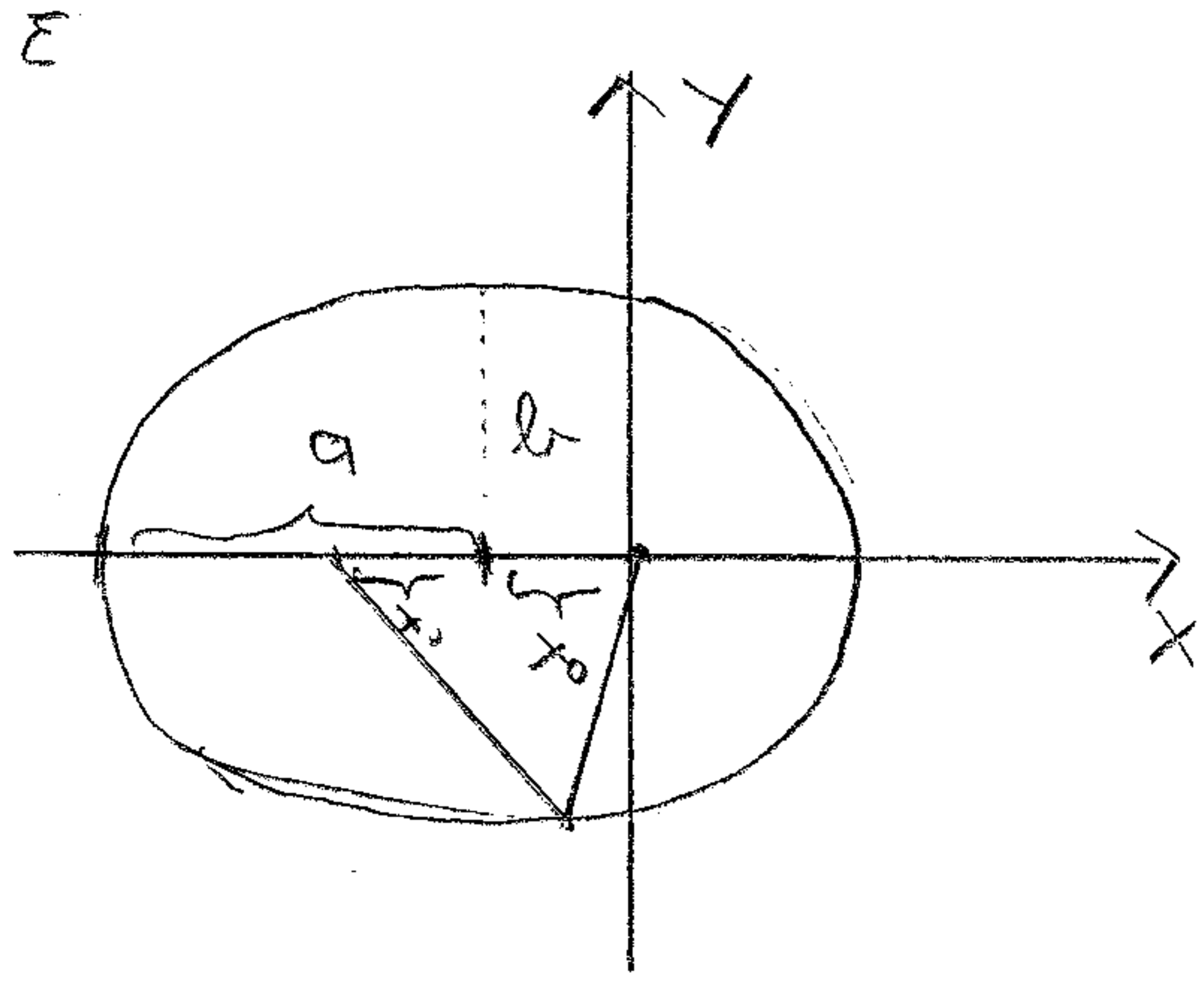
· Ebene: $z = z_0 - \lambda x$

$= z_0 - \lambda r \cos\varphi$

$\Longrightarrow$ · Schnittkurve: $r = \overset{p}{z_0} - \lambda r \cos\varphi$ Projektion in xy Ebene

$$\Longrightarrow \quad \frac{p}{r} = 1 + \underbrace{\lambda}_{\varepsilon} \cos\varphi$$

· Als quadratische Form: (Ellipse)



$$x^2 + y^2 = (p - \varepsilon x)^2$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{(x+x_0)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

· Grosse Halbachse $a = \dfrac{p}{1-\varepsilon^2}$

· Kleine Halbachse $b = \dfrac{p}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}$

Brennpunkte $x_0 = \dfrac{\varepsilon p}{1-\varepsilon^2}$

1. Kepler'sche Gesetz: Die Planeten bewegen sich auf Ellipsen mit dem Kraftzentrum im Brennpunkt.
(Nur für leichte Planeten ist das Kraftzentrum die Sonne)

2. Kepler'sche Gesetz: Flächensatz $\Leftrightarrow$ Drehimpulserhaltung

3. Kepler'sche Gesetz: $\frac{T^2}{a^3}$ ist gleich für alle Planeten

T: Umlaufzeit

a: grosse Halbachse

Bew: Flächengeschwindigkeit $\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\varphi} = \frac{\ell}{2\mu} = \text{const}$

$\Longrightarrow$ Fläche der Ellipse: $T \cdot \frac{dA}{dt} = \frac{T\ell}{2\mu} = \pi a \cdot b$

$$a = \frac{p}{1-\varepsilon^2} = \frac{\ell^2}{\mu k} \frac{\mu k^2}{2|E|\ell^2} = \frac{k}{2|E|}$$

$$b = \frac{p}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} = \sqrt{1-\varepsilon^2}\, a = \frac{k}{2|E|} \sqrt{\frac{2|E|\ell^2}{\mu k^2}} = \frac{\ell}{\sqrt{2|E|\mu}}$$

$$\Longrightarrow T = 2\pi a b \frac{\mu}{\ell} = 2\pi a \frac{k}{\sqrt{2|E|\mu}} \frac{\mu}{k}$$

$$= 2\pi a^{3/2} \sqrt{\frac{\mu}{k}}$$

masse der Sonne

$k = G m_p m_s$

$\mu = \frac{m_p m_s}{m_p + m_s} \simeq m_p$

$$= 2\pi a^{3/2} \frac{1}{\sqrt{G m_s}}$$: hängt nur von der Masse der Sonne ab.

Laplace-Runge-Lenz Vektor

Das Coulomb Potential $V(|\vec{r}|) = -\frac{k}{|\vec{r}|}$ zeichnet sich noch durch eine weitere Erhaltungsgrösse aus: den sogenannten Laplace-Runge-Lenz Vektor

$$\vec{A} = \vec{p} \wedge \vec{L} - \mu k \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$$

Bew: $$\frac{d}{dt}\vec{A} = \dot{\vec{p}} \wedge \vec{L} - \mu k \left(\frac{\dot{\vec{r}}}{|\vec{r}|} - \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^2} \frac{d}{dt}|\vec{r}| \right)$$

Bewegungsgleichung

$$= -\frac{\mu k}{|\vec{r}|^3} \underbrace{\vec{r} \wedge (\vec{r} \wedge \dot{\vec{r}})}_{\vec{r}(\vec{r}\cdot\dot{\vec{r}}) - |\vec{r}|^2 \dot{\vec{r}}} - \frac{\mu k}{|\vec{r}|^3} \left(|\vec{r}|^2 \dot{\vec{r}} - \vec{r}(\vec{r}\cdot\dot{\vec{r}}) \right) = 0$$

$\blacksquare$

Dieser Vektor steht senkrecht zum Drehimpuls $\vec{L}$

$$\vec{A} \cdot \vec{L} = 0$$

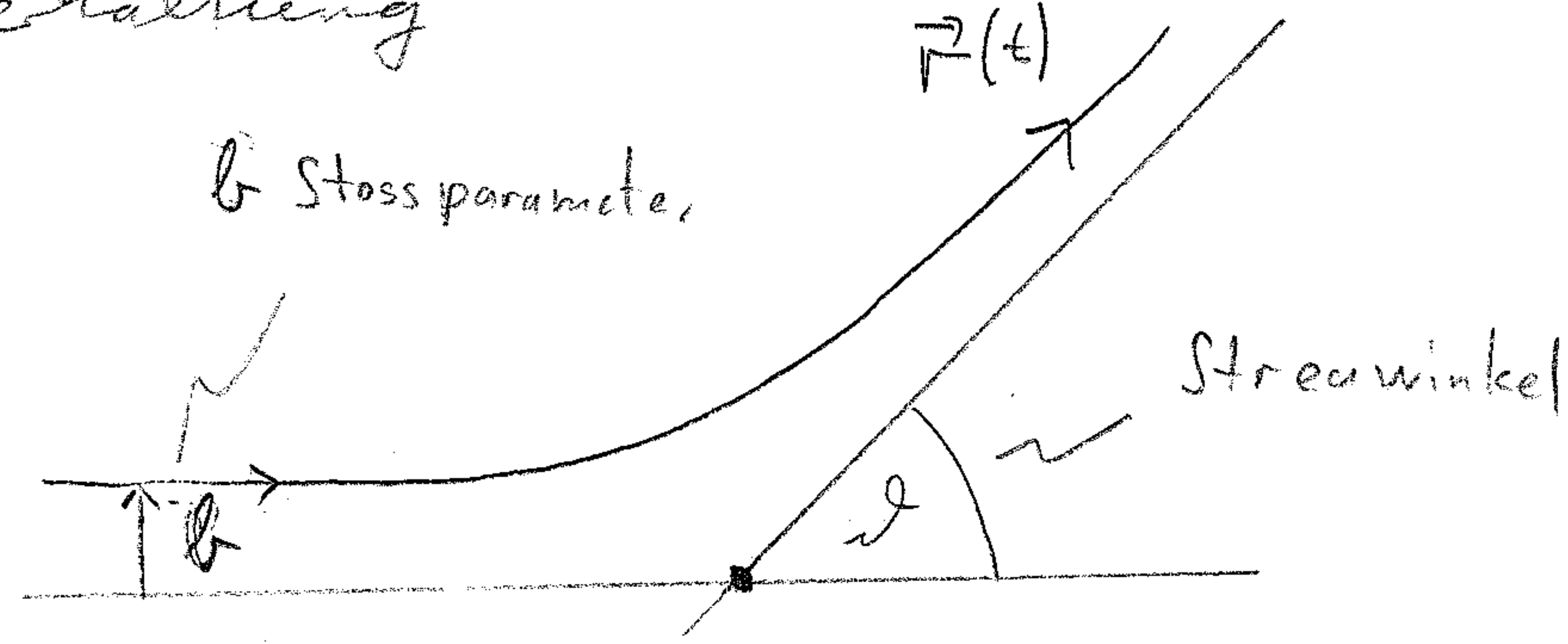
Zudem zeigt er in Richtung des Perihelion, und ist eine Konsequenz, dass sich der Perihel nicht dreht.

3.4 Streutheorie

Im folgenden untersuchen wir die Streuung von 2 Teilchen mit Zentralkraft. Wir arbeiten wieder im Schwerpunktsystem mit der relativ Koordinate $\vec{r}$ als Variable.

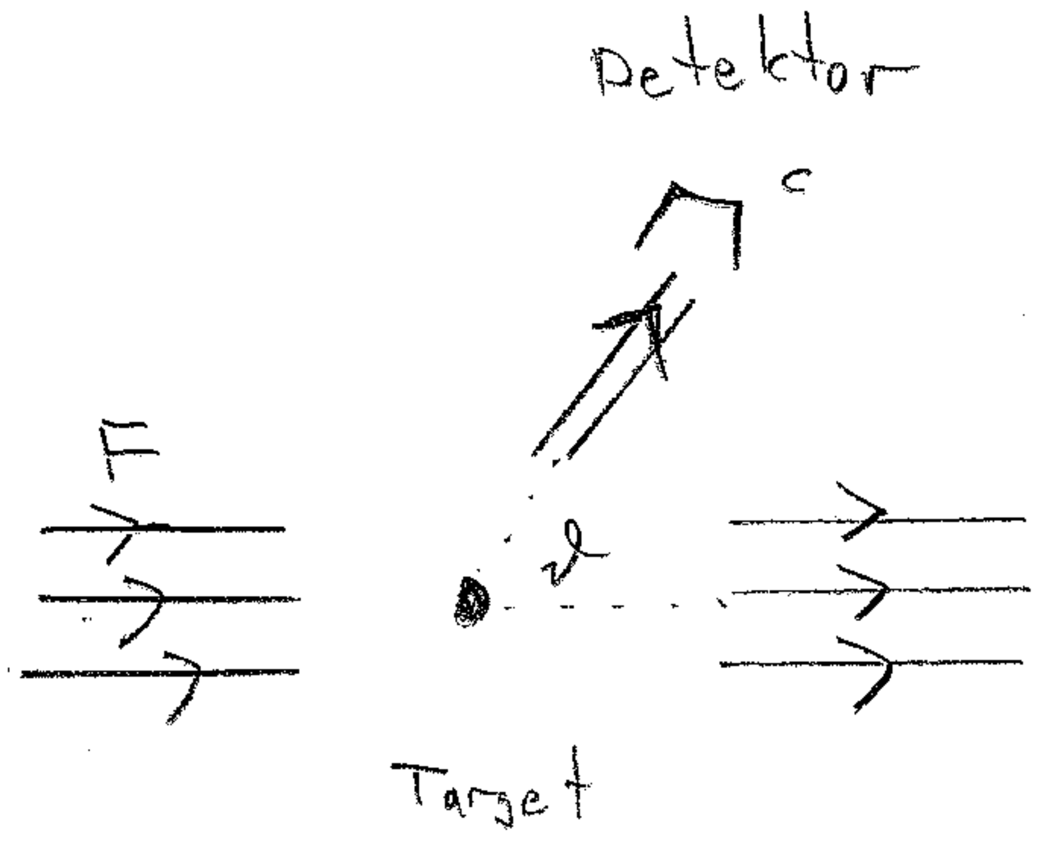
Bem: Nur elastische Stösse, wobei keine Energie in Wärme verwandelt wird

$\Longrightarrow$ Energieerhaltung



· Charakterisiert durch Energie E und Streuwinkel ϑ

Def: Der Stossparameter b ist der Abstand zwischen der Einfallsgeraden und dem Streuzentrum.



Streuexperiment:

- Einfallender Teilchenstrahl mit Fluss F = Anzahl Teilchen pro cm² pro sec.
- Messe gestreute Teilchen dN in einem Raumwinkel $d\Omega = \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi$
- Das Verhältnis bildet den Differentieller Streuquerschnitt

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{F}\,\frac{dN}{d\Omega} \simeq \frac{\overbrace{\Delta N}^{\text{experimentelle rate}}}{F\,\underbrace{\Delta\Omega}_{\text{experimenteller Öffnungswinkel}}}$$

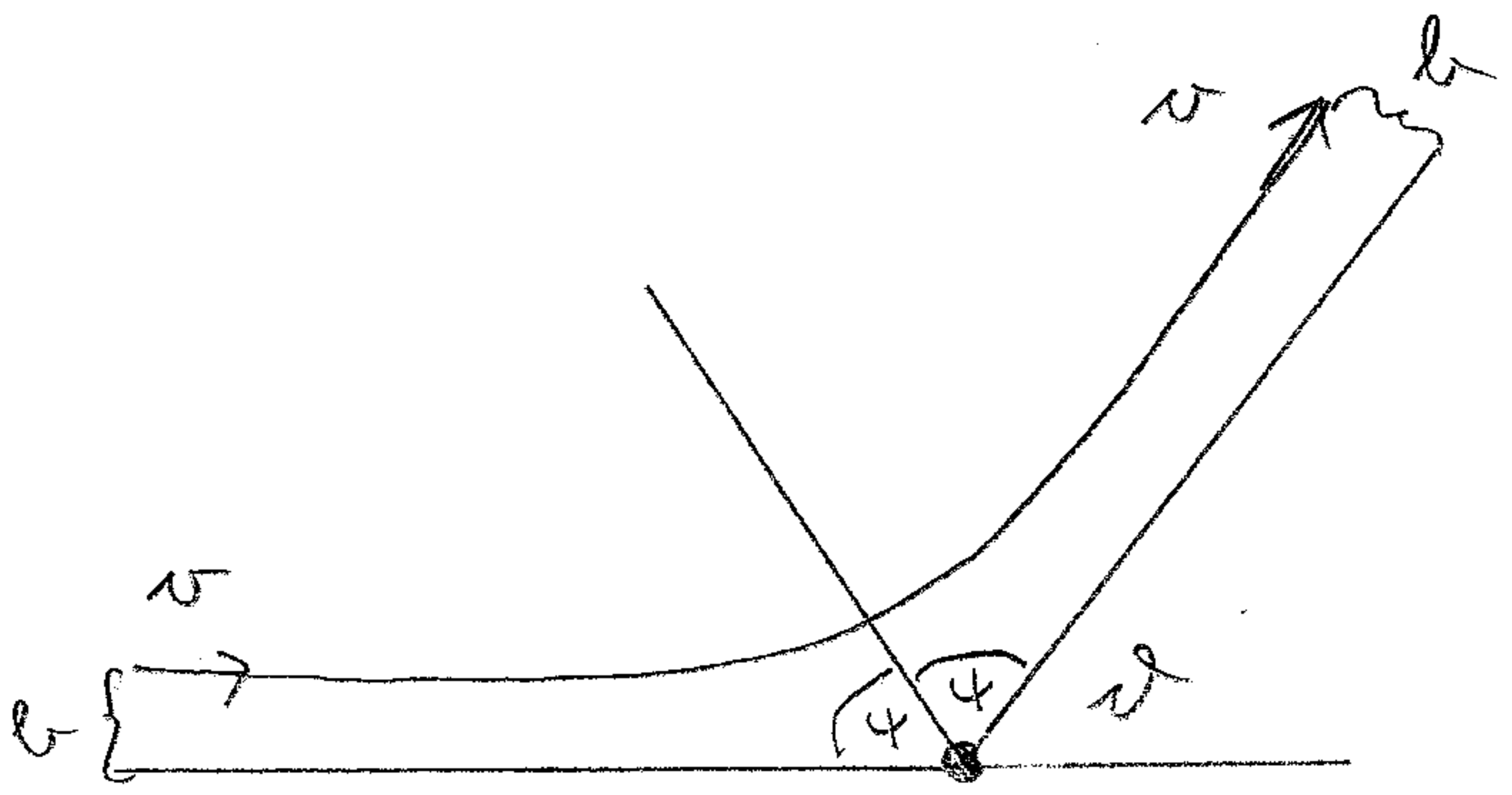
Der totale Streuquerschnitt ist dann

$$\sigma = \int d\Omega \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right) \quad : \quad \text{Dimension einer Fläche}$$

Für ein Rotationssymmetrischen Potential $V(r)$ ist das Streuproblem axial symmetrisch und somit hängt $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ nur vom Winkel ϑ und der Energie der einfallenden Teilchen ab

Für jede Energie E und Stossparameter b können wir die Trajektorie berechnen und den Wert ϑ bestimmen.

$$\Longrightarrow \vartheta(b, E) \xrightarrow{\text{invertieren}} b(\vartheta, E)$$



- Energieerhaltung:
  Ein und auslaufende Geschwindigkeit sind identisch: $v = \sqrt{2E/m}$
- Drehimpulserhaltung:
  $l = m \cdot v \cdot b$

- $d\vartheta = \left| \frac{d\vartheta}{db} \right| db$

- gestreute Teilchen: $\quad b\,db\,d\varphi$

$$\Rightarrow \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{b(\vartheta, E)\,db\,d\varphi}{\sin\vartheta\,d\vartheta\,d\varphi} = \frac{1}{\sin\vartheta}\, b(\vartheta, E) \frac{d}{d\vartheta} b(\vartheta, E)$$

<u>Rutherford Streuung:</u> Wir betrachten jetzt $\frac{1}{r}$ Potential.
im repulsiven Fall

$$V(r) = -\frac{k}{r} = \frac{e e'}{r} \qquad k = -ee'$$

$$\Rightarrow \frac{1}{r} = \frac{m e e'}{l^2} (\varepsilon \cos\varphi - 1)$$

$\vartheta = \pi - 2\varphi$

$$\Rightarrow r \to \infty \Rightarrow \cos\varphi = \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \sin\frac{\vartheta}{2} = \frac{1}{\varepsilon}$$

mit $\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2El^2}{m(ee')^2}} = \sqrt{1 + \left(\frac{2Eb}{ee'}\right)^2} > 1$

und $E > 0$ für Streuung.

Somit erhalten wir

$$\cot\frac{\vartheta}{2} = \frac{2Eb}{ee'} \Longrightarrow b(\vartheta, E) = \frac{ee'}{2E}\cot\frac{\vartheta}{2}$$

Einsetzen für den Streuquerschnitt liefert

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \underbrace{\frac{ee'}{2E}\cot\frac{\vartheta}{2}}_{b(\vartheta)} \; \underbrace{\frac{ee'}{2E}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{\sin^2\frac{\vartheta}{2}}}_{\frac{db}{d\vartheta}} \; \frac{1}{\underbrace{\sin\vartheta}_{=2\cos\frac{\vartheta}{2}\sin\frac{\vartheta}{2}}}$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{ee'}{2E}\right)^2 \frac{1}{|\sin\frac{\vartheta}{2}|^4}$$

Dies ist der berühmte Rutherford Streuquerschnitt für die Streuung von α Teilchen an Atomkernen.