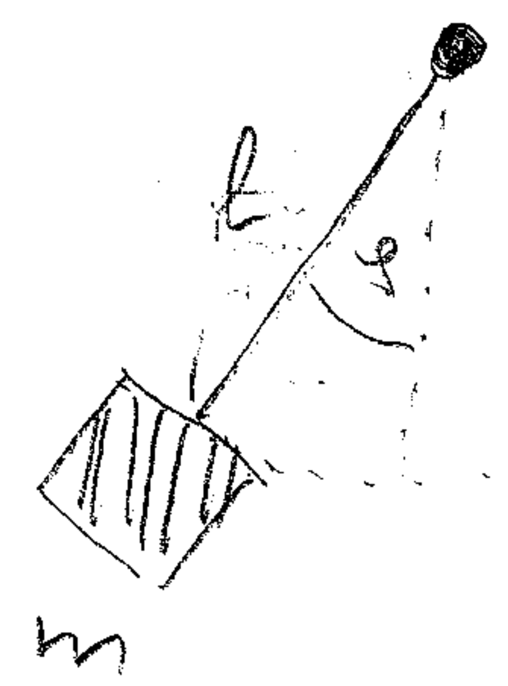
4 Systeme mit Zwangsbedingungen

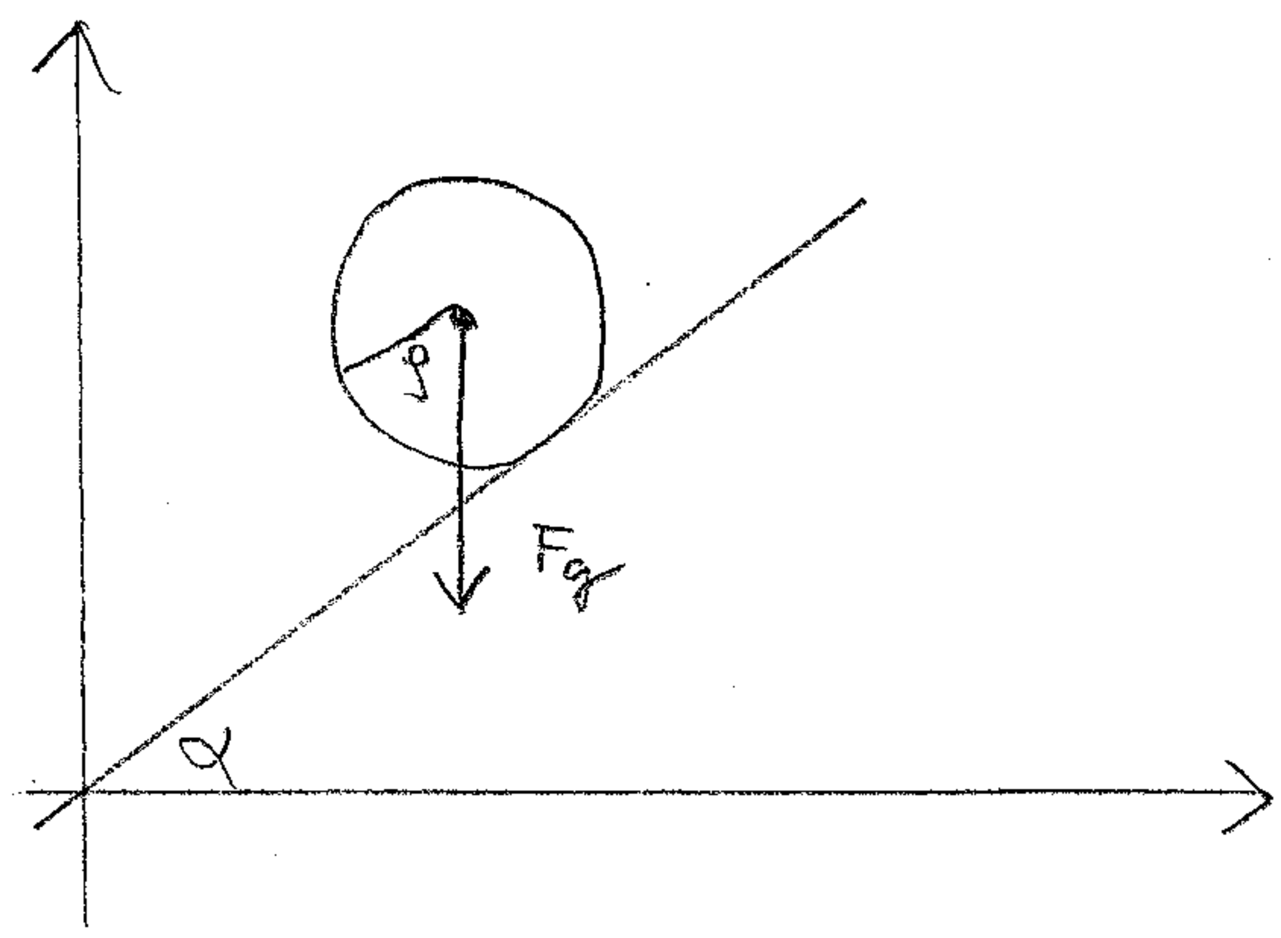
In praktischen Anwendungen treten in vielen Problemen Nebenbedingungen auf, die den Konfigurationsraum einschränken.

Bsp: • Pendel: Ein Körper der Masse m hängt an einer festen Stange, die um die Achse rotieren kann



Zwangsbedingung: die Länge ℓ ist fest.

Bsp: • Ein Zylinder rollt auf einer schiefen Ebene



Holonome Zwangsbedingungen:

In diesem Fall kann die Zwangsbedingung als ein Set von Gleichungen, die die Koordinaten q^i miteinander verknüpfen:

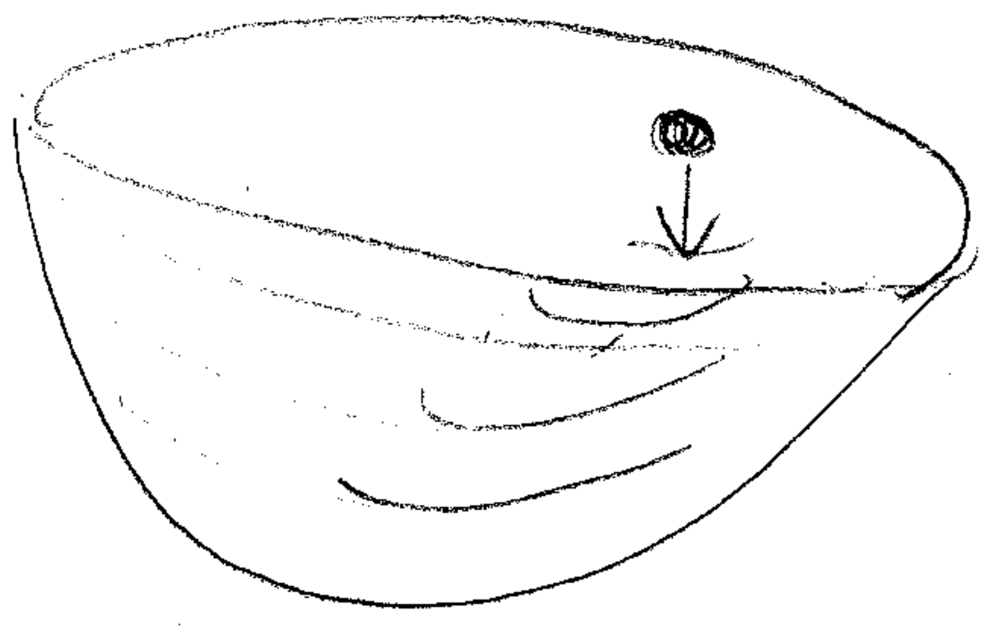
$$f_j(q^1 \dots q^{3N}, t) = 0 \qquad j = 1 \dots k$$

d.h. wir haben k Nebenbedingungen die Zahl der Freiheitsgrade auf $3N-k$ reduzieren.

Bsp: · Pendel: $x^2+y^2 = l$

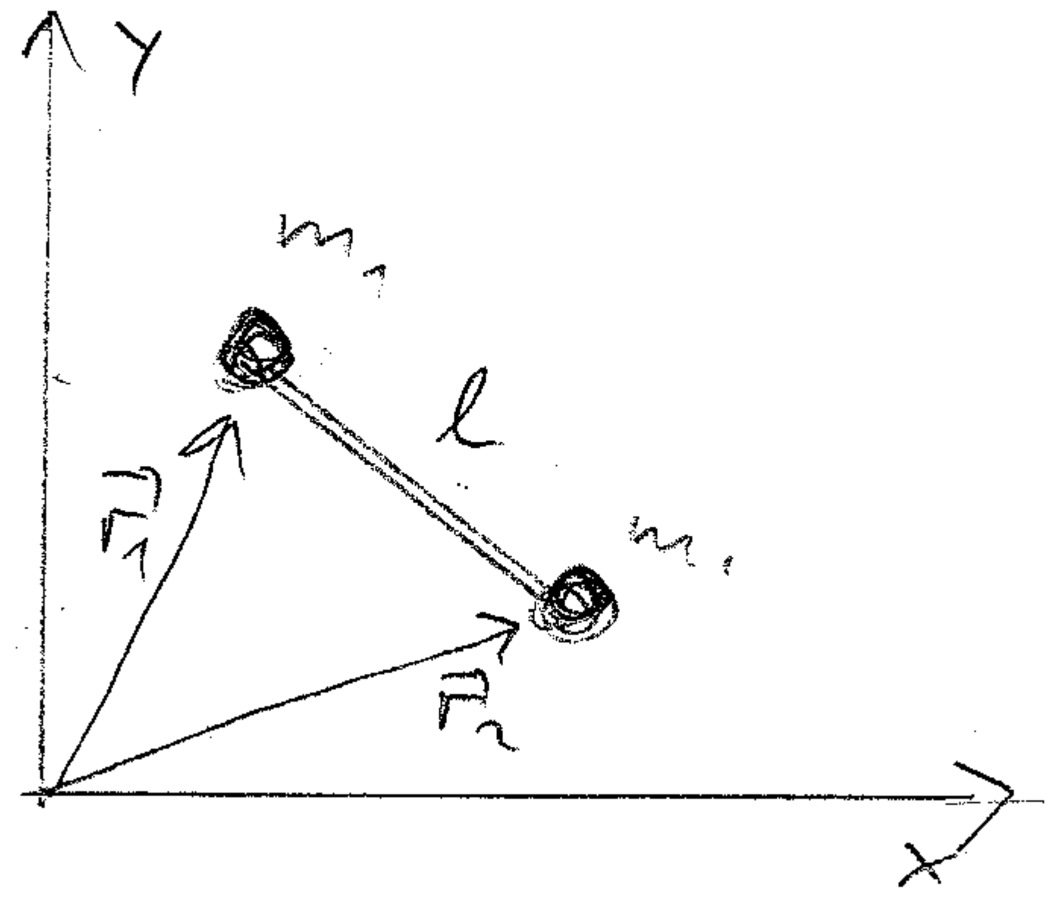
$\Rightarrow$ $r = l$ in Polarkoordinaten.

· Teilchen gleitet reibungsfrei auf einer Oberfläche



$f(\vec{r}) = 0$

$\hookrightarrow$ Beschreibt die Fläche in $\mathbb{R}^3$



Bsp: • Zwei Teilchen durch einen starren Stab verbinden

$$|\vec r_1 - \vec r_2|^2 = \ell^2$$

• $\vec r_1$ Koordinate von 1
$\vec r_2$ Koordinate von 2 } Bewegung des Schwerpunktes und Rotationen des Systems.

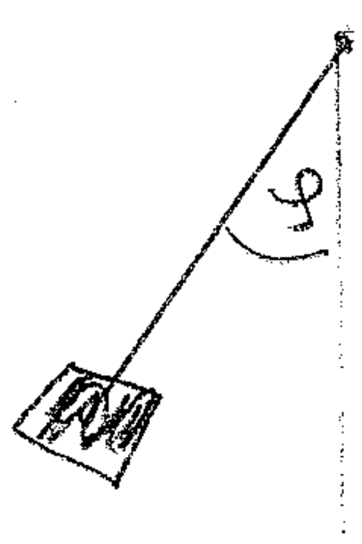
$\Longrightarrow$ Anwendung: O_2 - Moleküle bei tiefen Temperaturen $kT \ll E_{vibration}$

Bem: Holonome Zwangsbedingungen definieren eine Hyperfläche im Konfigurationsraum mit der Dimension $f=3N-k$

• auf dieser Hyperfläche können wir verallgemeinerte Koordinaten einführen.

Pendel:

$$x^2+y^2=\ell^2$$

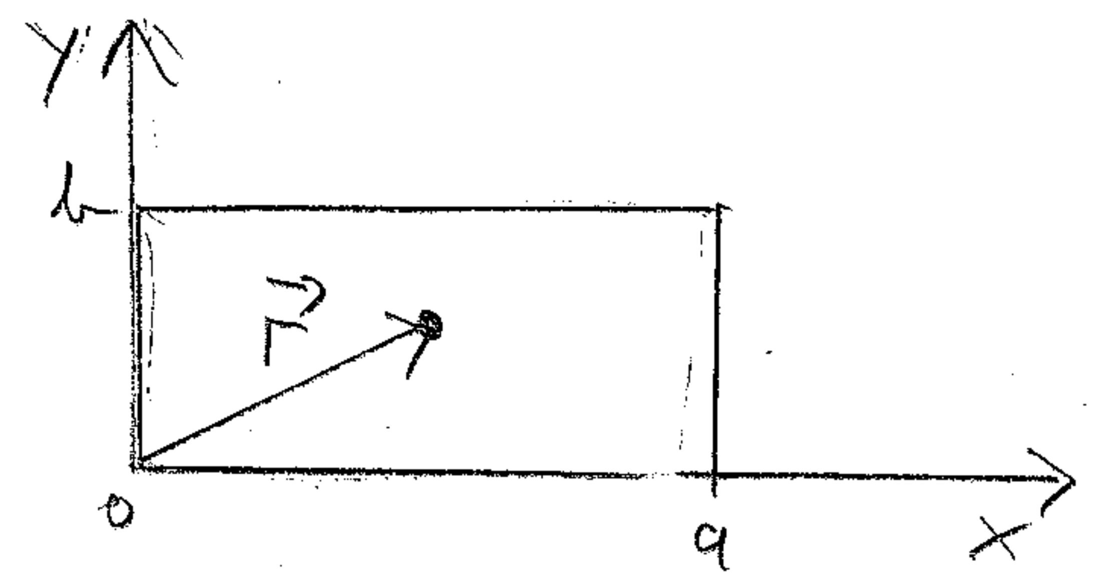


$\Longrightarrow$ Hyperfläche ist ein Kreis mit Radius l

$\Longrightarrow$ verallgemeinerte Koordinate ist der Winkel φ.

Nicht-holonome Zwangsbedingungen

Nicht alle Zwangsbedingungen lassen sich in der Form von holonomen Bedingungen schreiben. Im folgenden betrachten wir ein paar Beispiele



Bsp: · Ein Teilchen in einer Box

$0 \leq x \leq a$

$0 \leq y \leq b$

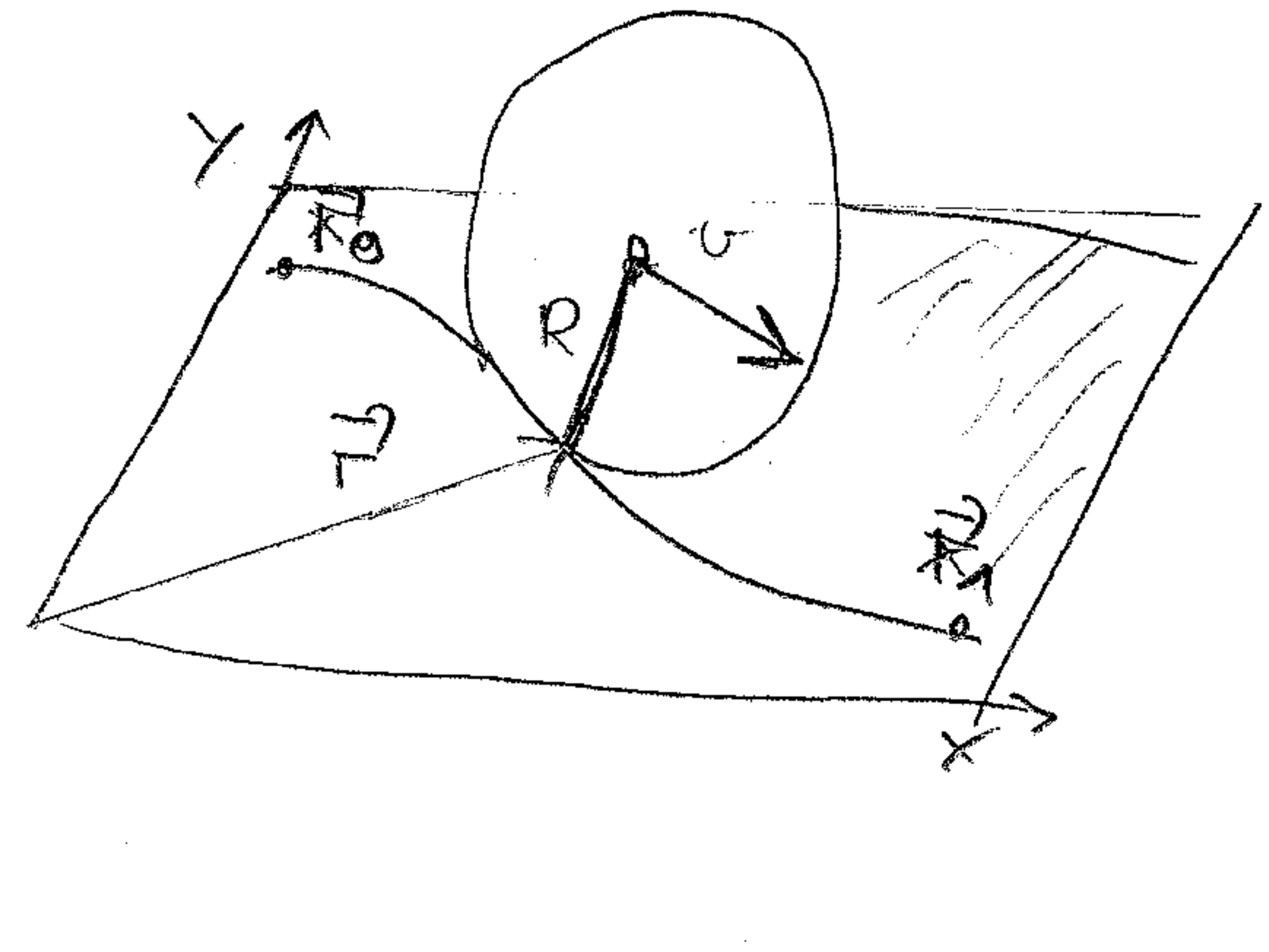
$\Longrightarrow$ Nebenbedingung ist in Form einer Ungleichung und reduziert die Freiheitsgrade nicht.

· Rollen eines Rades in der Ebene

· Berührungspunkt (x, y)

· Orientierung der Achse ϑ zur x-Richtung ϑ

· Rollwinkel φ



Nebenbedingung:

$$|\vec{v}| = R \cdot \dot{\varphi} \quad \Longrightarrow \quad \dot{x} = R\,\dot{\varphi}\cos\vartheta$$
$$\dot{y} = R\,\dot{\varphi}\sin\vartheta$$

Diese Bedingungen sind nicht integrierbar, da φ und ϑ abhängen vom Weg von $\vec{r}_0$ nach $\vec{r}_1$

4.1. Dynamik eines Systems mit holonomen Zwangsbedingungen

Zunächst wollen wir einmal das Vorgehen zur Lösung von Problemen mit Zwangsbedingungen geben, und anschliessend mit Hilfe des d'Alembert'schen Prinzips beweisen.

1) Bestimme den Konfigurationsraum des Systems und führe verallgemeinerte Koordinaten ein, die die holonome Zwangsbedingungen erfüllen

$\Longrightarrow$ verallgemeinerte Koordinaten

- $q^i \quad i = 1..f$
- $\vec{r}_i(q^1 \dots q^f)$

2) · Drücke die kinetische Energie in diesen verallgemeinerten Koordinaten aus

$$T = \sum_i \frac{m_i}{2} \dot{\vec{r}}_i^{\,2} \longrightarrow T = \frac{1}{2} \sum_{i,j}^{f} A_{ij}(q^s)\, \dot{q}^i \dot{q}^j$$

und das Potential

$$V(r_1 \dots r_N) \longrightarrow V(q^1 \dots q^f)$$

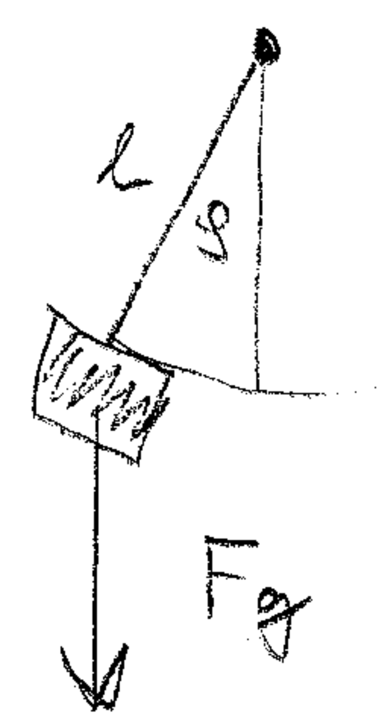
3) Wir erhalten somit die Lagrange Funktion in diesen verallgemeinerten Koordinaten

$$L(q^i, \dot{q}^i, t) = T - V$$

Die Bewegungsgleichungen folgen anschliessend mittels der Euler-Lagrange Gleichungen

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0$$

Bsp: • Pendel: Körper mit Masse m und Koordinate $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$



Zwangsbedingung: $x^2 + y^2 = \ell^2$

$\Rightarrow$ Winkelkoordinate φ, φ verallgemeinerte Koordinate

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2} m \ell^2 \dot{\varphi}^2$$

$$V = m \cdot g y = m g \ell \cos\varphi$$

$$\Rightarrow L(\varphi, \dot{\varphi}) = \frac{1}{2} m \ell^2 \dot{\varphi}^2 - m g \ell \cos\varphi$$

Bewegungsgleichung:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m l^2 \ddot{\varphi} = \frac{\partial L}{\partial \varphi} = mg \sin \varphi$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{\varphi} = \frac{g}{l^2} \sin \varphi$$

Für kleine Auslenkungen, können wir entwickeln $(\varphi \ll \pi)$

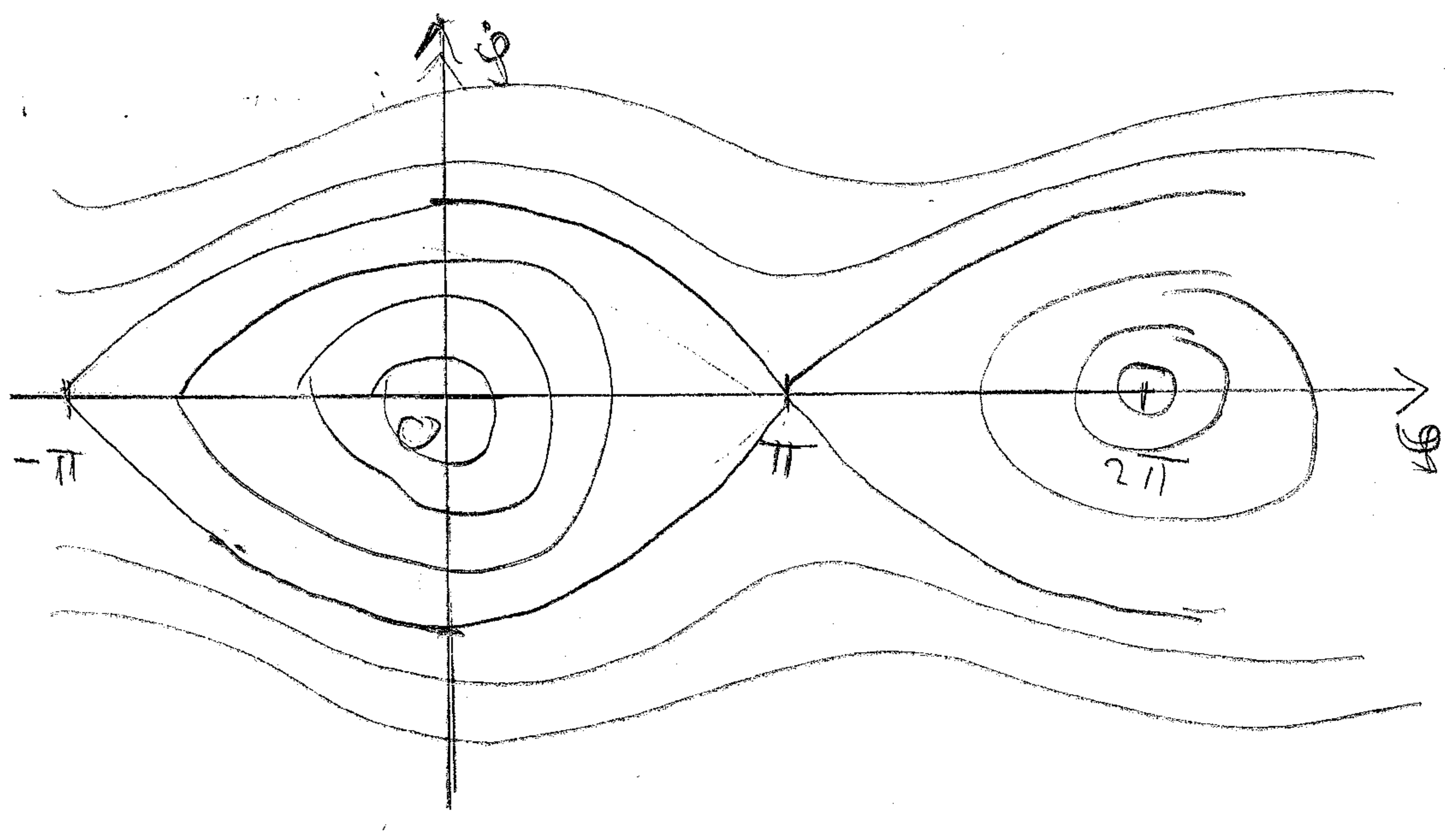
$$\ddot{\varphi} = \frac{g}{l^2}\varphi$$

$\Rightarrow$ harmonische Oszillationen

$$\varphi(t) = A\cos(\omega t + \varphi_0) \qquad \omega^2 = \frac{g}{l^2}$$

Stationäre Lösungen: · $\varphi = 0, 2\pi, 4\pi$: stabil

· $\varphi = \pi, 3\pi, 5\pi, \ldots$: instabil



Bem: In einem System mit holonomen Zwangsbedingungen müssen zusätzliche Kräfte wirken, damit die Trajektorie auf der Hyperfläche bleibt.

Die Newtonschen Gleichungen haben somit die Form

$$\underbrace{m_i \ddot{\vec{r}}_i}_{\text{Beschleunigung}} = \underbrace{-\nabla_i V}_{=\vec{F}_i \text{ Kraft auf das Teilchen}} + \vec{Z}_i$$

Zusätzliche Kraft damit das Teilchen die Zwangsbedingung erfüllt

Def: Die Grössen

$$\vec{Z}_i = m_i \ddot{\vec{r}}_i - \vec{F}_i \qquad i = 1 \dots N$$

heissen Zwangskräfte und sind a priori unbekannt. Falls wir aber eine Lösung des Problems haben können wir sie berechnen.

- $\vec{F}_i = -\nabla_i V$: bekannte Treibende Kraft.

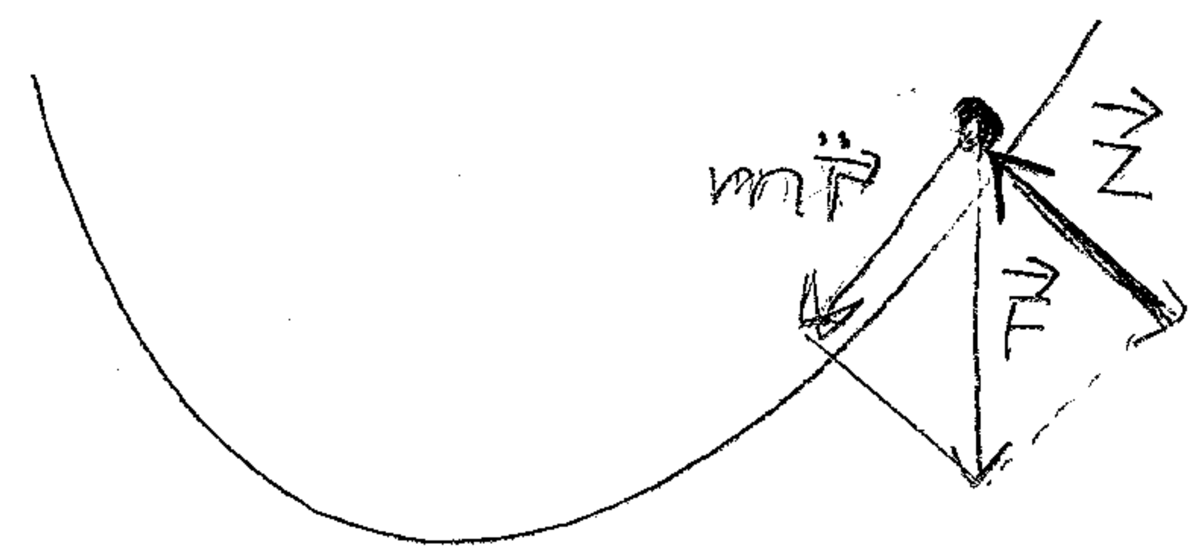
Def: Eine virtuelle Verrückung $\delta\vec{r}_i$ oder δq^i ist eine infinitesimale Änderung der Lagekoordinaten, welche mit den Zwangsbedingungen verträglich sind.

Im folgenden betrachten wir Zwangskräfte, die keine Arbeit leisten unter einer virtuellen Verrückung, d.h.,

$$\delta A_z = \sum_i \vec{Z}_i \cdot \delta\vec{r}_i = 0$$

und die Zwangskräfte stehen senkrecht auf der Hyperfläche des Zustandsraumes.

Bsp:



- Teilchen unter Gravitation gleitet auf einer Fläche

Dies führt uns auf das Prinzip von d'Alembert

Prinzip von d'Alembert: In einem System mit Zwangsbedingungen erfüllt eine Bewegungstrajektorie

$$\sum_i \left(m_i \ddot{\vec{r}}_i + \vec{F}_i\right) \cdot \delta \vec{r}_i = 0$$

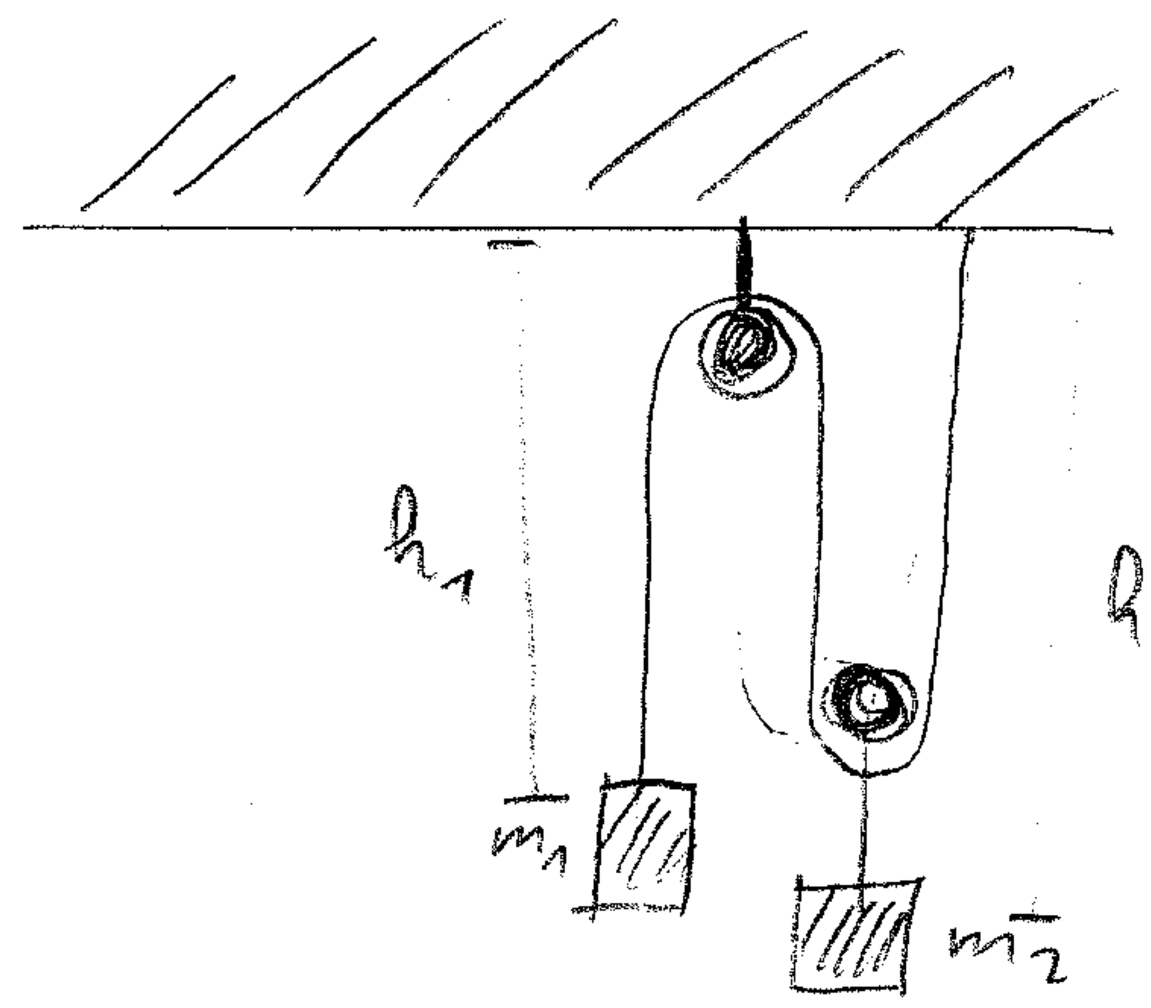
für alle virtuellen Verrückungen δr_i.

Bem: Im statischen Fall reduziert sich dies auf eine Gleichung für die Gleichgewichtslage

$$\sum_i \vec{F}_i \, \delta \vec{r}_i = 0$$

Bsp: • Flaschenzug

$\delta h_1 = -2 \delta h_2$: virtuelle Verrückung die konsistent mit Zwangsbedingung



$\Longrightarrow$ $m_1 g \, \delta h_1 + m_2 g \, \delta h_2 = 0$

$\Longrightarrow$ Für Gleichgewicht müssen wir das Massenverhältnis

$$m_1 = \frac{m_2}{2}$$

haben

Als nächstes, wollen wir zeigen, dass aus dem Prinzip von d'Alembert das Hamiltonische Variationsprinzip folgt, und somit unser Lösungsschema für Systeme mit holonomen Zwangsbedingungen equivalent zum Prinzip von d'Alembert ist.

Dazu führen wir eine geeignete Koordinaten Transformation ein die die holonomen Zwangsbedingungen erfüllt

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q^1 \ldots q^f, t)$$

$$\Longrightarrow \delta \vec{r}_i = \sum_j \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q^j} \delta q^j \qquad \text{: virtuelle Verrückung}$$

Somit besagt das Prinzip von d'Alembert

$$0 = \sum_i \left(m_i \ddot{\vec{r}}_i - \vec{F}_i\right) \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_i \left(m_i \ddot{\vec{r}}_i + \nabla_i V\right) \cdot \delta \vec{r}_i$$

$$\bullet \quad \sum_i \vec{F}_i \delta \vec{r}_i = \sum_{i,j} \underbrace{\vec{F}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q^j}} \delta q^j = \sum_j Q_j \, \delta q^j = -\sum_j \frac{\partial V}{\partial q^j} \delta q^j$$

$$Q_j \equiv \sum_i \vec{F}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q^j} \qquad \text{: verallgemeinerte Kräfte}$$

$$= -\sum_i \nabla_i V \frac{\partial \vec{r}}{\partial q^j} = -\frac{\partial V}{\partial q^j}$$

$$\sum_i m_i \ddot{\vec r}_i \delta \vec r_i = \sum_{ij} m_i \ddot{\vec r}_i \cdot \frac{\partial r_i}{\partial q^j}\delta q^j$$

$$= \sum_j \left(\sum_i \left[\frac{d}{dt}\left(m_i \dot{\vec r}_i \cdot \frac{\partial \vec r_i}{\partial q^j}\right) - m_i \dot{\vec r}_i \underbrace{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec r_i}{\partial q^j}\right)}\right]\right)\cdot\delta q^j$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial r_i}{\partial q^j}\right) = \frac{\partial \dot{\vec r}_i}{\partial q^j} = \frac{\partial \vec v_i}{\partial q^j}$$

$$\frac{\partial \vec r_i}{\partial q^j} = \frac{\partial \vec v_i}{\partial \dot q^j} = \left[\frac{\partial}{\partial \dot q^j}\left(\sum_k \frac{\partial \vec r_i}{\partial q^k}\dot q^k + \frac{\partial \vec r_i}{\partial t}\right)\right]$$

$$= \sum_j\left(\sum_i\left[\frac{d}{dt}\left(m_i \vec v_i\cdot\frac{\partial \vec v_i}{\partial \dot q^j}\right) - m_i \vec v_i \frac{\partial \vec v_i}{\partial q^j}\right]\right)\delta q^j$$

$$= \sum_j \left\{ \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot q^j}\Big(\underbrace{\sum_i \frac{m_i}{2}\vec v_i^2}_{T}\Big) - \frac{\partial}{\partial q^j}\Big(\underbrace{\sum_i \frac{m_i}{2}\vec v_i^2}_{T}\Big)\right\}\delta q^j$$

Zusammengefasst erhalten wir

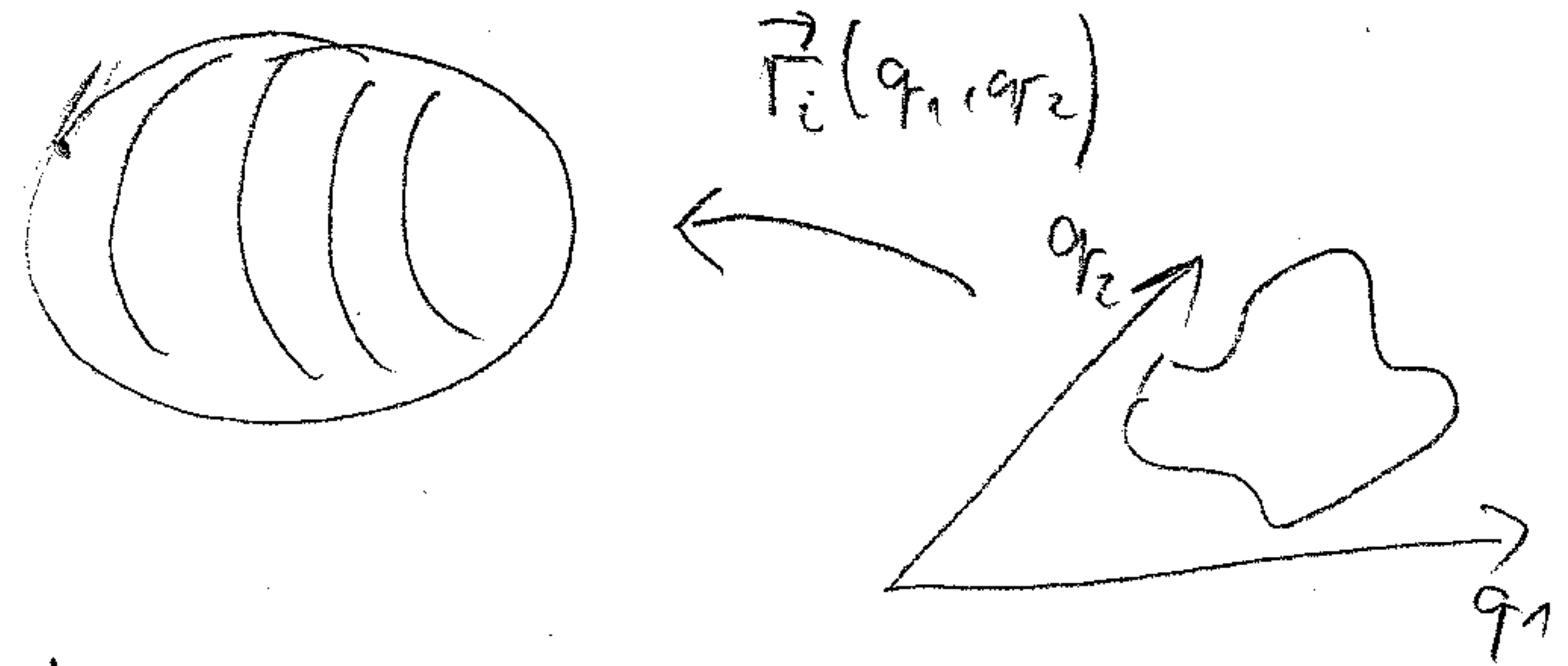
$$0 = \sum_j \left\{ \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot q^j} L - \frac{\partial}{\partial q^j}L\right\}\delta q^j$$

für alle Variationen δq^j. Da die Variationen unabhängig voneinander sind, ist somit der Ausdruck in der Klammer $\{\} = 0$ und wir erhalten die Euler-Lagrange Gleichungen.

Bem: Wir können jetzt noch etwas die Mathematische Struktur von Problemen mit holonomen Zwangsbedingungen anschauen:

- Die Zwangsbedingungen $f_i(\vec{r}_1 \ldots \vec{r}_N) = 0 \quad i = 1 \ldots k$ definieren eine $f = 3N-k$ dimensionale Hyperfläche im $\mathbb{R}^{3N}$ und ist eine Mannigfaltigkeit M.

- Die verallgemeinerten Koordinaten $q^i \quad i = 1 \ldots f$ stellen Karten zu dieser Mannigfaltigkeit M dar.



- In jedem Punkt auf der Mannigfaltigkeit, haben wir eine Tangentiale Fläche: der Vektorraum aufgespannt durch alle Tangentialvektoren

TM_P : Vektorraum der Tangenten zu M im Punkt P

Die Grössen $\dot{q}^i$ sind Vektoren im diesem Tangentialraum

$$\dot{q}^i \in TM_P$$

- Die Mannigfaltigkeit ist eingebettet in $\mathbb{R}^{3N}$ und erbt daher ein Skalarprodukt.
Somit ist M eine Riemann'sche Mannigfaltigkeit, wobei die kinetische Energie

$$T = \sum_{ij} a_{ij}(q^k)\, \dot{q}^i \dot{q}^j$$

gerade dieses Skalarprodukt ist.

$$T: \quad TM_p \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$\dot{q}^i \longmapsto \sum_{ij} a_{ij}(q^k)\, \dot{q}^i \dot{q}^j$$

- Die Potentielle Energie ist eine Funktion auf M in die reelen Zahlen

$$V: \quad M \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$q^i \longmapsto V(q^i)$$

- Die Lagrange Funktion ist somit eine skalare Funktion auf dem Tangenten Bündel $TM = \bigcup_p TM_p$

$$L: \quad TM \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$\dot{q}^i, q^i \longmapsto L(\dot{q}^i, q^i)$$

- Die verallgemeinerten Impulse $p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j}$ sind im Dualraum von TM_p, d.h. eine Abbildung von TM_p in die reelen Zahlen:

$$p_i: \quad TM_p \longrightarrow \mathbb{R} \qquad\qquad p_i \in TM_p^*$$
$$q^i \longmapsto \sum_i p_i q^i$$

- Analog ist auch $\frac{\partial L}{\partial q^i}$ im Dual Raum

$$\frac{\partial L}{\partial q^i} \in TM_p^*$$

- Eine virtuelle Verrückung δq^i ein Vektor im Tangentialraum für jeden Punkt P entlang der Kurve $q^i(t)$

- Unter einer Variablen Transformation $q^i \to q^i(\xi^1 \ldots \xi^f)$ Transformieren die $\dot{q}^i$ somit kontravariant

$$\dot{q}^i = \sum_j \frac{\partial q^i}{\partial \xi^j} \cdot \dot{\xi}^j$$

und die verallgemeinerten Impulse p_i kovariant

$$p_j = \sum_i \frac{\partial q^i}{\partial \xi^j} \cdot \tilde{p}_i$$

$$\tilde{p}_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}_i}$$

- Somit sind die Euler-Lagrange Gleichungen invariant unter Koordinaten Transformationen.

- Das Hamiltonische Prinzip besagt somit, dass die Bewegung extremal zur Wirkung

$$S = \int_{t_0}^{t_1} dt\, L(\dot{q}^i, q^i)$$

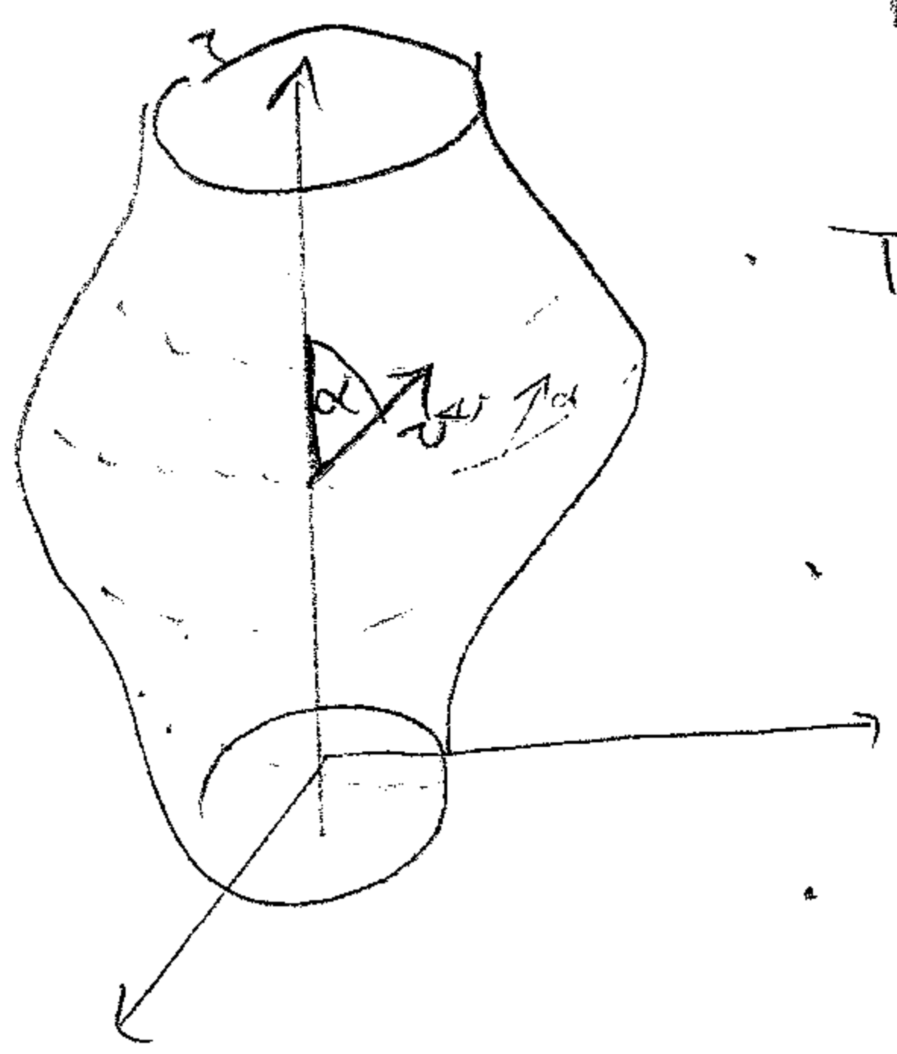
ist auf der Mannigfaltigkeit M.

Bem: Ein kräftefreies Teilchen, dass sich auf einer Fläche im 3-dim Raum bewegt, folgt einer Geodäte, d. h. der kürzesten Verbindung zwischen zwei Punkten. Dabei spielt die kinetische Energie die Rolle des skalar Produktes, dass die Distanz misst.

- Kräftefreies Teilchen auf Kugel bewegt sich auf Grosskreisen.

- rotationssymmetrische Fläche:

$r, \varphi, z \implies z = f(r)$: holonome Zwangsbedingung



- $T = \frac{1}{2} m \left[\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 + (f'(r) \cdot \dot{r})^2 \right] = L(r, \varphi, \dot{r}, \dot{\varphi})$

- Drehimpulserhaltung $p_\varphi = r^2 \dot{\varphi} = \cancel{\text{konst.}}$

$= r |v| \sin\alpha$

- Energieerhaltung $T = \frac{1}{2} \vec{v}^2 = \text{const}$ $|v| = \text{const}$

$\implies r \cdot \sin\alpha = \text{const}$

$\implies r = \frac{\text{const}}{\sin\alpha} > \text{const.}$

Die Bahn ist eingeschränkt auf ein Band.