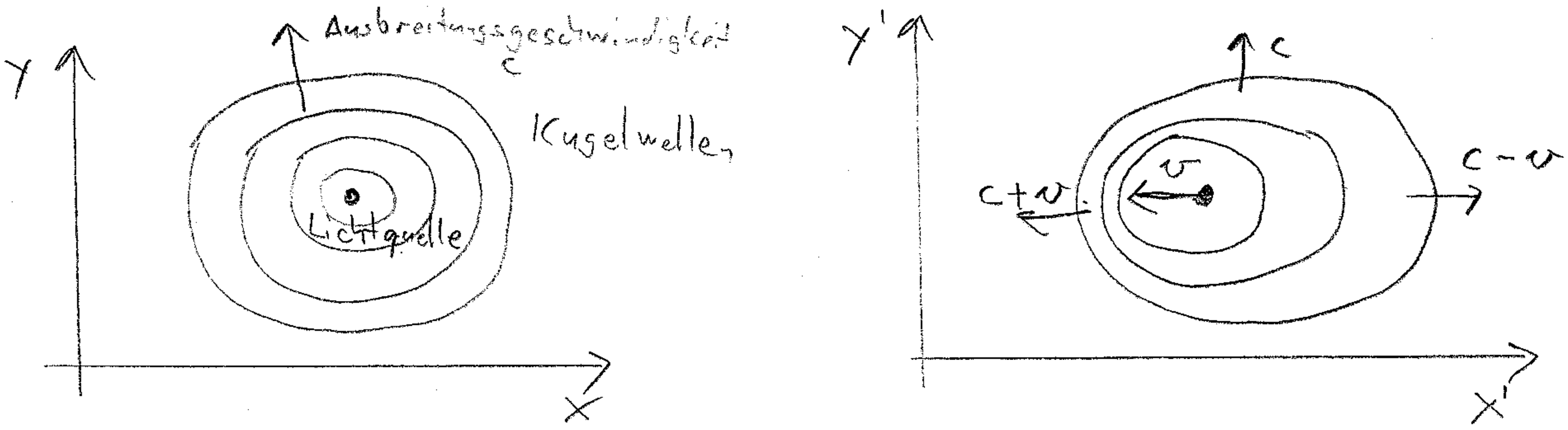
5. Spezielle Relativitätstheorie

Mit der Beschreibung der Elektrodynamik mittels den Maxwell Gleichungen ergibt sich ein Problem mit der klassischen Mechanik:

- elektro-magnetische Wellen breiten sich mit der Lichtgeschwindigkeit aus

  c : Lichtgeschwindigkeit

Diese endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit ist nicht verträglich mit einem Galilei-boost



d.h., für eine bewegte Lichtquelle scheint sich die Wellenfront mit der Geschwindigkeit

$c-v \; , \; c+v$ auszubreiten.

$\Longrightarrow$ Die Elektrodynamik scheint den Grundsatz zu verletzen, dass alle Naturgesetze in allen Inertialsysteme gleich aussehen.

Für das System der Mechanik plus Elektrodynamik scheint es somit als ob ein ausgezeichnetes Inertialsystem existiert. Zahlreiche optische Experimente, insbesondere bei Michelson und Morley haben aber gezeigt, dass dies keine empirische Grundlage hat: $c \equiv$ konst auch für bewegte Quellen.

Dieses Dilema wurde von Einstein elegant gelöst, indem er sich vom Dogma einer absoluten Zeit löste, und folgende Postulate an die Spitze seiner Theorie stellte.

(I) Spezielles Relativitätsprinzip:

Die Naturgesetze lauten in allen Inertialsystemen gleich.

(II) Konstanz der Lichtgeschwindigkeit:

Die Lichtgeschwindigkeit ist in allen Inertialsystemen, dieselben universellen Konstanten c, unabhängig vom Bewegungszustand der Lichtquelle.

Aus dem Relativitätsprinzip lässt sich ganz allgemein die Transformationsregeln zwischen zwei Inertialsystemen herleiten:

- Wir führen den 4-Vektor ein

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} ct \\ \vec{x} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \quad , \text{d.h.,} \quad x^0 = c \cdot t$$

- Aus Homogenität lässt sich die Transformation als eine affine Abbildung schreiben

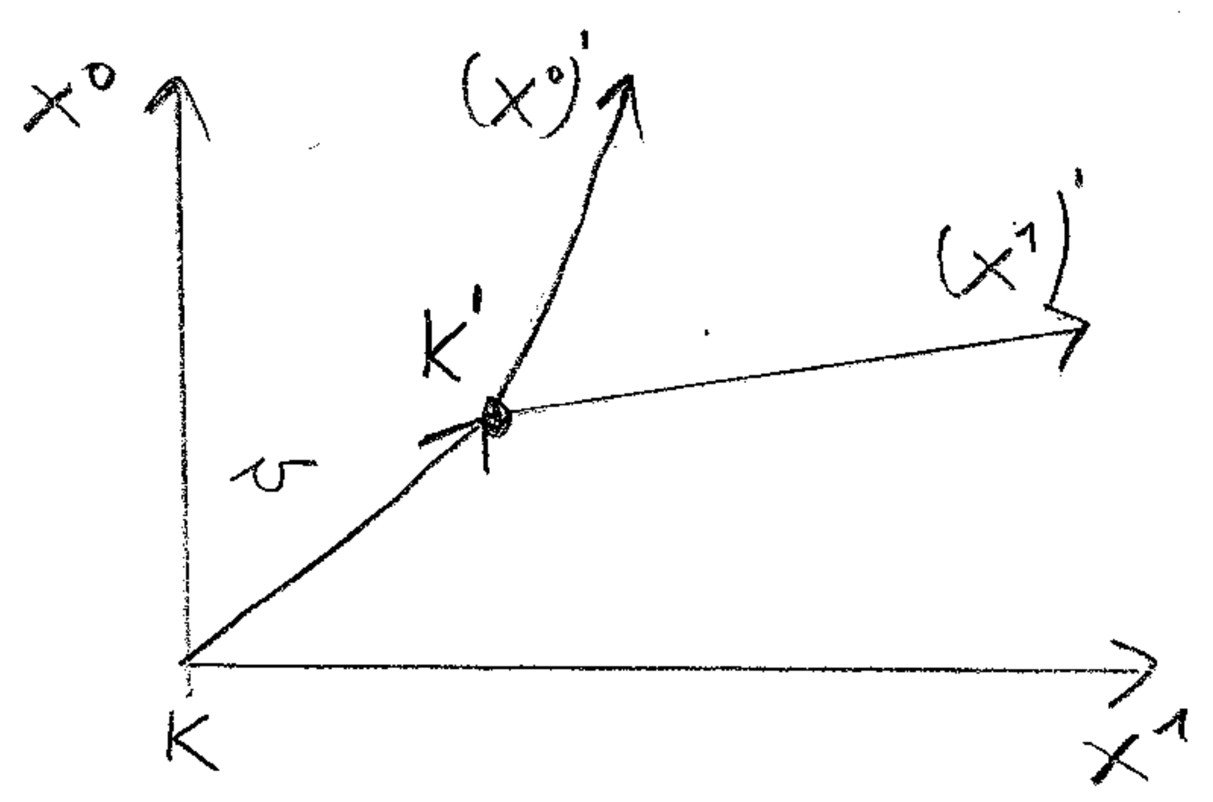
$$\underline{x}' = \underbrace{\Lambda}_{\text{lin Abb.}} \underline{x} + \underbrace{\underline{a}}_{\text{Translation in Raum und Zeit}}$$

- Eine Untergruppe sind alle Rotationen

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix} \qquad R \in SO(3)$$

und es genügt einen Boost zu betrachten von einem Inertialsystem, dessen Ursprung sich mit konst. Geschwindigkeit entlang der x-Achse bewegt und zur Zeit $t=0$ im Ursprung ist

$\Rightarrow$ d.h. $\underline{a} = 0$



Wir haben somit die Transformation

$$x^{0'} = a(v)\, x^0 + b(v)\, x^1$$
$$x^{1'} = d(v)\, x^1 + e(v)\, x^0$$
$$x^{2'} = x^2$$
$$x^{3'} = x^3$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} a & b & & \\ e & d & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

wobei $a(-v) = a(v)$, $d(-v) = +d(v)$, aber $b(-v) = -b(v)$ und $e(-v) = -e(v)$. Aus der Definition, dass sich K' mit konstanter Geschwindigkeit bewegt, gilt für den Ursprung

$$x^{1'} = 0 = d(v)\, \overbrace{v \cdot t}^{x^1} + e(v)\, c \cdot t$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{e(v)}{d(v)} = -\frac{v}{c} \equiv -\beta$$

Weiter können wir benutzen, dass sich K im Vergleich zu K' mit der Geschwindigkeit $v' = -v$ bewegt, daher hat die Rücktransformation die Form

$$x^0 = a\, x^{0'} - b\, x^{1'}$$
$$x^1 = d\, x^{1'} - e\, x^{0'}$$
$$x^2 = x^{2'}$$
$$x^3 = x^{3'}$$

$$\Lambda^{-1} = \begin{pmatrix} a & -b & & \\ -e & d & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

Wir haben somit die Identität

$$\Lambda^{-1}\cdot\Lambda = \mathbb{1}$$

und erhalten die Bedingungen

$$a^2 - eb = 1, \quad ab - db = 0$$
$$ae - ed = 0, \quad -eb + d^2 = 1$$

Dieses System von Gleichungen können wir lösen, wobei ein freier Parameter bleibt.

Wir setzen $b = -a\cdot\beta\varkappa^2$ mit $\varkappa^2$ freier Parameter

und erhalten die Lösung für die Transformation

$$\begin{aligned} x^{0'} &= \gamma x^0 - \gamma\beta\varkappa^2 x^1 \\ x^{1'} &= -\gamma\beta x^0 + \gamma x^1 \\ x^{2'} &= x^2 \\ x^{3'} &= x^3 \end{aligned} \qquad \Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta\varkappa^2 & & \\ -\gamma\beta & \gamma & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

mit $\beta = \frac{v}{c}$ und $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\varkappa^2\beta^2}}$.

Der Parameter $\varkappa$ ist noch nicht festgelegt aus dem Relativitätsprinzip, sondern kann jetzt so bestimmt werden, dass das II Postulat erfüllt ist.

Bem: · Setzen wir $\varkappa^2 = 0$, so erhalten wir die Galilei-Transformationen zurück

$$ct' = ct$$
$$x^{1'} = x^1 - v\cdot t$$
$$x^{2'} = x^2 \qquad x^{3'} = x^3$$

· Die Grösse $\frac{c}{\varkappa}$ spielt die Rolle einer maximalen Signalausbreitungs Geschwindigkeit. d.h., $\varkappa = 0$, alle Wechselwirkungen sind instantan.

Die Lichtgeschwindigkeit c ist gerade in allen Inertialsystemen gleich, wenn wir $\varkappa = 1$ setzen und wir erhalten den Lorentz-boost:

$$\boxed{\begin{aligned} x^{0'} &= \gamma x^0 - \gamma\beta x^1 \\ x^{1'} &= -\gamma\beta x^0 + \gamma x^1 \\ x^{2'} &= x^2 \\ x^{3'} &= x^3 \end{aligned} \qquad \Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & & \\ -\beta\gamma & \gamma & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}}$$

mit $\beta = \frac{v}{c}$ und $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$.

<u>Bem:</u> Die Lorentz Transformation lässt die Grösse

$$(x^0)^2 - \vec{x}^2 = c^2t^2 - (x^{1\,2} + x^{2\,2} + x^{3\,2})$$
$$= g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu$$

invariant.

Metrischer Tensor im Mikowski Raum: $g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$

$$\Big\ulcorner\ (x^{0\prime})^2 - (\vec{x}')^2 = (\gamma x^0 - \beta\gamma x^1)^2 - (-\gamma\beta x^0 + \gamma x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2$$
$$= \gamma^2(1-\beta^2)(x^0)^2 + \gamma^2(\beta^2-1)(x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2$$
$$= (x^0)^2 - \vec{x}^2 \quad \lrcorner$$

- Ein Teilchen, dass sich mit Lichtgeschwindigkeit bewegt, hat auch im bewegten System die Lichtgeschwindigkeit:

$$\vec{x}(t) = c \cdot t\, \vec{n} \qquad : \vec{n} \text{ Einheitsvektor}$$
$$\Rightarrow \left|\frac{d}{dt}\vec{x}\right| = c$$

$$\Rightarrow \quad t' = t \cdot \gamma(1 - \beta n^1)$$
$$x^{1\prime} = ct\,\gamma\,(n^1 - \beta) = \frac{n^1 - \beta}{1 - \beta n^1} \cdot c\,t'$$
$$x^{2\prime} = n^2 c \cdot t = \frac{1}{\gamma} \frac{n^2}{1 - \beta n^1}\, c \cdot t'$$
$$x^{3\prime} = n^3 c t = \frac{1}{\gamma} \frac{n^3}{1 - \beta n^1}\, c t'$$

$$\Rightarrow \left|\frac{d}{dt'}\vec{x}'\right| = c$$

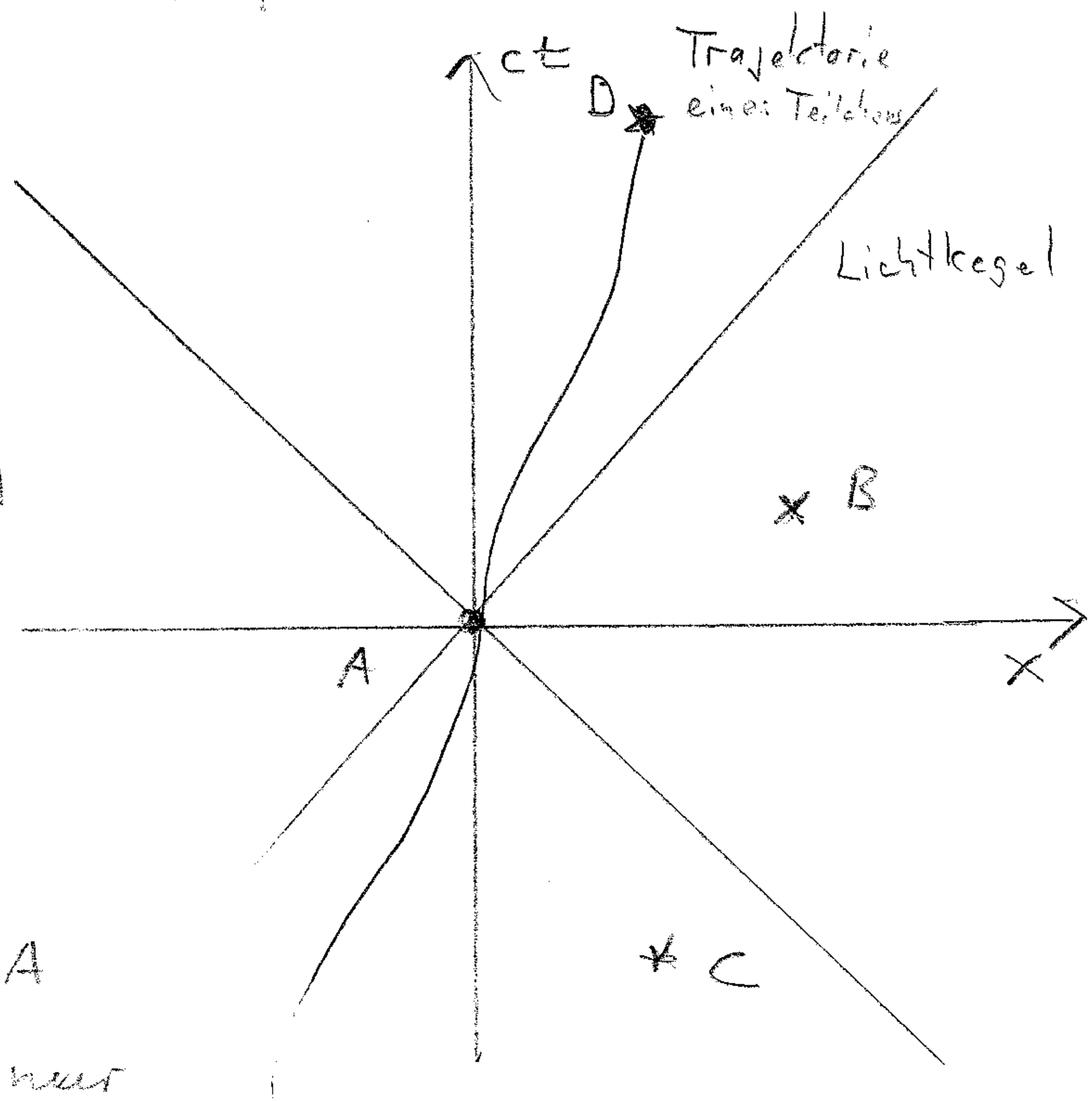
5.1 Einfache Folgerungen der SRT

Aus der Lorentztransformation sehen wir auch, dass es nicht möglich ist sich schneller als das Licht zu bewegen. Daher können wir für einen 4-Vektor x^ν einführen

$g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu > 0$: Zeitartig

$g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = 0$: Lichtartig

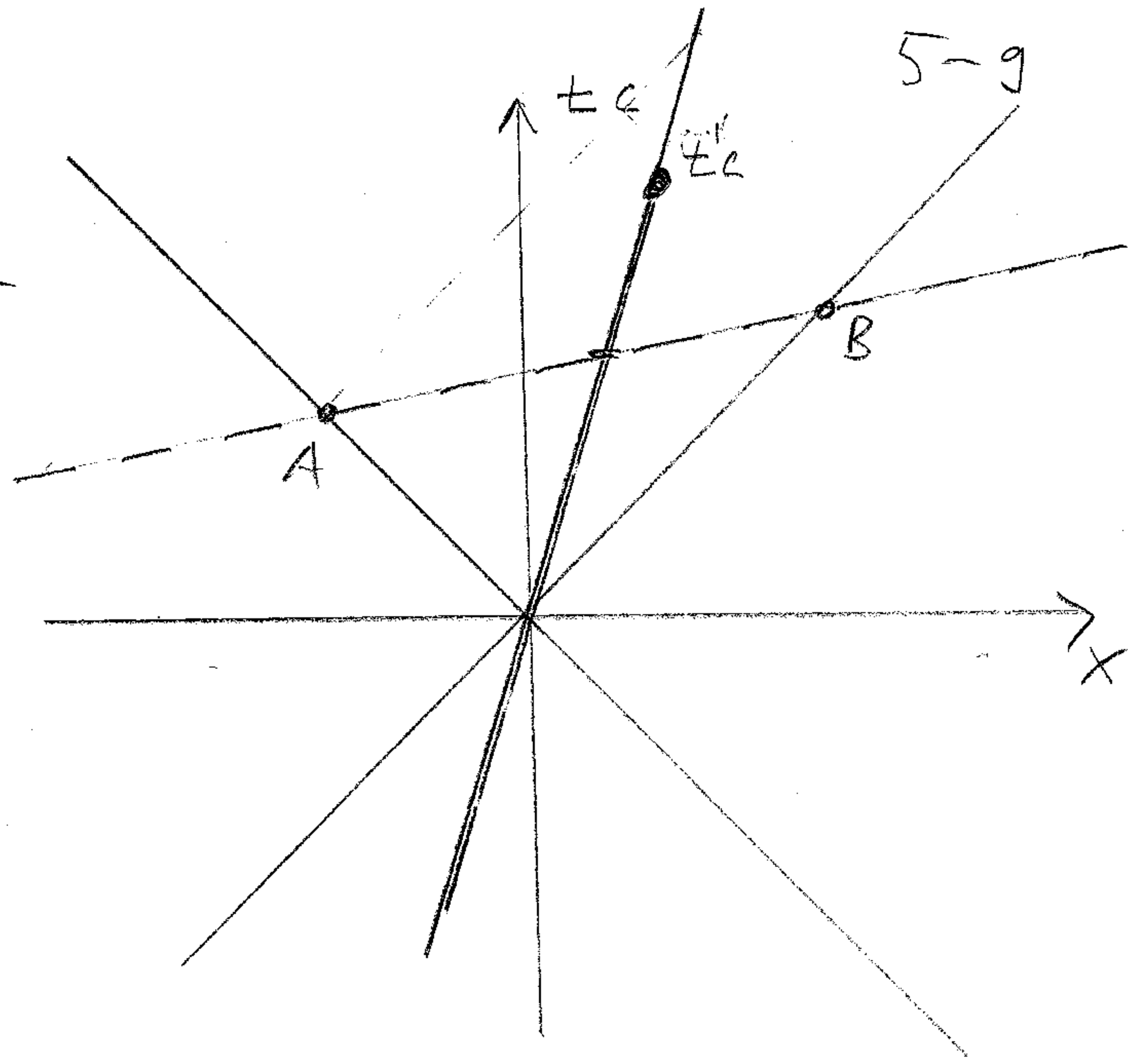
$g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu < 0$: Raumartig



- Als Beobachter im Punkt A zur Zeit $t=0$, können wir nur sehen und beeinflusst werden, durch Ereignisse die im unteren Lichtkegel stattgefunden haben: d.h. nur durch zeitartige Ereignisse wie die in der Vergangenheit liegen.

- Andererseits können wir nur Einfluss nehmen auf Ereignisse die im oberen Lichtkegel stattfinden, z.B D.

- Ereignisse die durch einen Raumartigen Vektor separiert sind können nichts voneinander wissen.



- Für einen gleichförmig mit v Bewegten Beobachter sind zwei Ereignisse A, B gleichzeitig wenn

$$x^{0'} = c\tau = \text{konst}$$

Somit entspricht für einen ruhenden Beobachter den Ereignissen mit

$$c\tau = \gamma ct - \beta x \gamma$$

$$\Rightarrow ct = \beta x + \frac{c\tau}{\gamma}$$: Entspricht einer Geraden mit Steigung $\frac{v}{c}$.

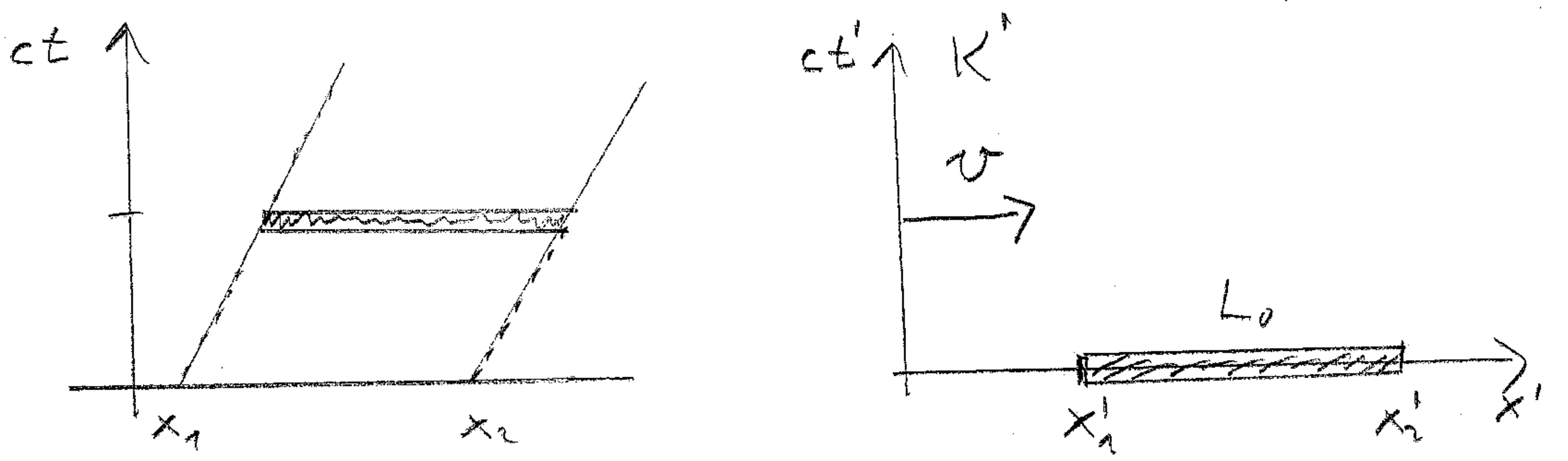
- Es gibt somit keine absolute Gleichzeitigkeit.

  - Im Bewegten System: Das Licht von Ereignis A und B kommt gleichzeitig an, da die Distanz gleich ist.

  - Im ruhenden System: Das Licht von A und B kommt gleichzeitig an, da von A ein längerer Wegstrecke ist, aber A früher aufleuchtet als B.

Längenkontraktion:

Wir betrachten einen Stab welcher im Inertialsystem K' ruht und die Länge L_0 hat, d.h. $L_0 = x_2' - x_1'$



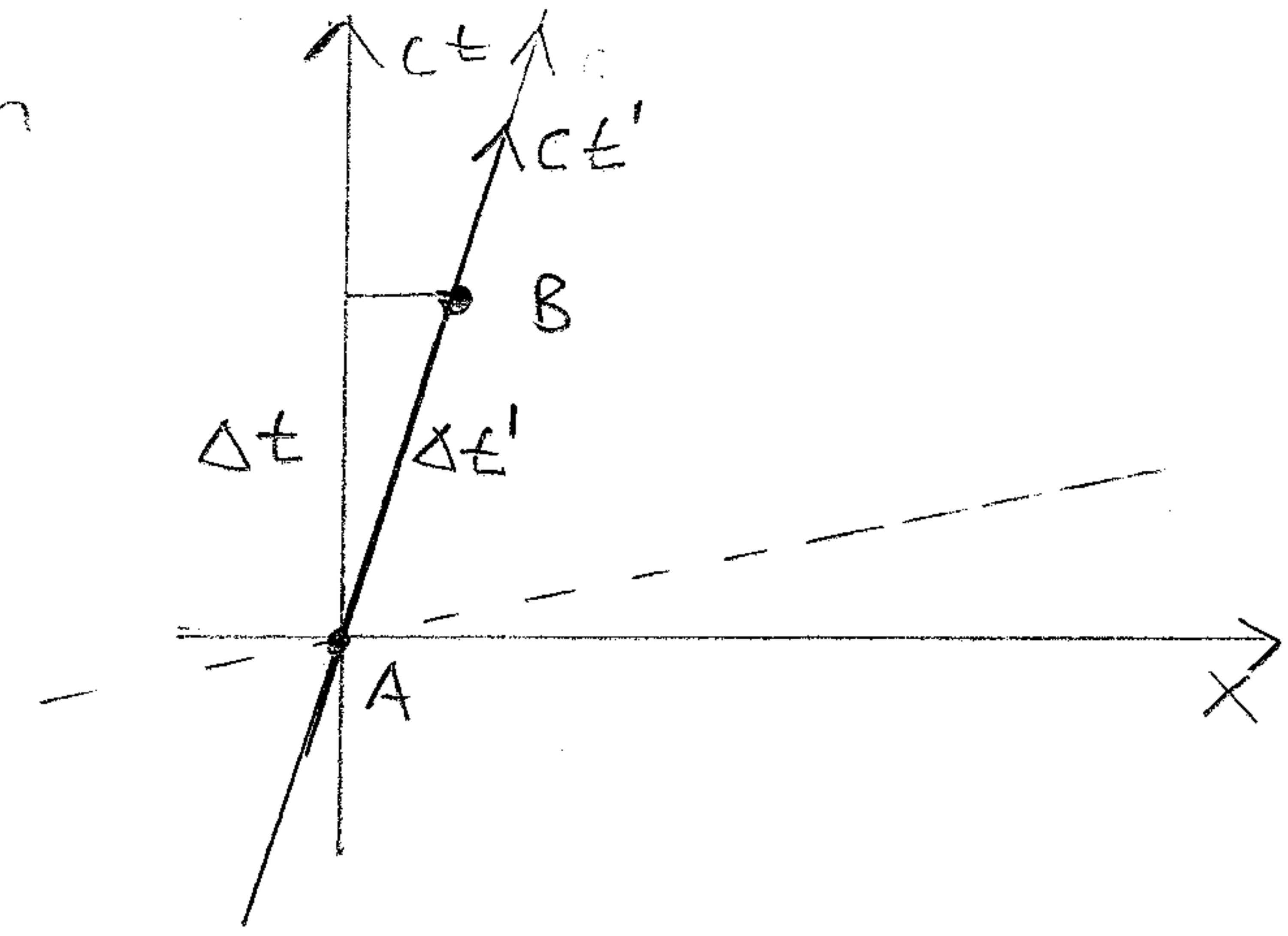
Die Länge des Stabes in K ist jetzt (zur Zeit t

$$
\begin{aligned}
L &= x_2 - x_1 \\
&= \frac{1}{\gamma}\left(x_2' + \gamma v t\right) - \frac{1}{\gamma}\left(x_1' + \gamma v t\right) \\
&= \frac{L_0}{\gamma} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\, L_0
\end{aligned}
$$

Der bewegte Stab erscheint somit kürzer als im Ruhesystem.

Zeitdilatation:

Wir betrachten eine im Koordinaten-Ursprung von K' ruhende Uhr. Nachdem im ruhenden System die Zeit Δt verstrichen ist, zeigt die Uhr in ihrem Ruhesystem



$$\Delta t' = \gamma \cdot t - \gamma \frac{v}{c^2} \cdot \overbrace{v \cdot t}^{x^1}$$

$$= \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\, t$$

$\Longrightarrow$ Eine bewegte Uhr geht somit um den Faktor $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ langsamer

Bem: · Das Differential der Eigenzeit ist

$$d\tau = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\, dt$$

und für eine allgemeine Bewegung gilt

$$\tau_2 - \tau_1 = \int_{t_1}^{t_2} dt \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

: Zeitdifferenz für die bewegte Uhr

: $t_2 - t_1$ Zeit im Laborsystem

· Bsp: · Muon Zerfall

· Zwillings-Paradoxon.

5.2 Lorentztransformationen

Die Transformationen die ein Inertialsystem wieder in ein Inertialsystem überführt ist in der speziellen Relativitätstheorie nicht mehr durch Galilei transformationen, sondern durch die Poincaré - transformation geben. Diese Transformationen bilden wieder eine Gruppe: die Poincaré - Gruppe.

Eine solche Transformation kann geschrieben werden als

$$\underline{x}' = \Lambda \underline{x} + \underline{a}$$

Translation in Ort und Zeit

$$(x^\mu)' = \sum_{\nu=0}^{3} \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu$$

Lorentz transformation

d.h, sie setzt sich aus einer Translation und einer Lorentz transformation zusammen.

Eine Lorentztransformation ist charakterisiert, dass es die Minkowski metrik

$$g = g_{\nu\mu} = g^{\nu\mu} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$

invariant lässt, d.h.,

$$\Lambda^T g \Lambda = g$$

$$\sum_{\mu,\alpha} \Lambda^\mu{}_\nu \, g_{\mu\alpha} \Lambda^\alpha{}_\beta = g_{\nu\beta}.$$

Somit ist für jeden 4-Vektor x^ν die Grösse

$$g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = x^{0\,2} - \vec{x}^{\,2} = \text{const}$$

eine feste Grösse in allen Inertialsystemen. Insbesondere wird der Lichtkegel mit

$$g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = 0$$

auf sich selber abgebildet unter eine Lorentz-transformation.

Γ $y^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$

$$\Rightarrow g_{\mu\nu} y^\mu y^\nu = g_{\mu\nu} \Lambda^\mu{}_\alpha x^\alpha \Lambda^\nu{}_\beta x^\beta$$

$$= \underbrace{\left(g_{\mu\nu} \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta\right)}_{g_{\alpha\beta}} x^\alpha x^\beta = g_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta \quad \lrcorner$$

Eine spezielle Lorentztransformation haben wir bereits kennen gelernt:

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & & \\ -\gamma\beta & \gamma & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\chi & -\sinh\chi & & \\ -\sinh\chi & \cosh\chi & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

mit $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$, $\beta = \frac{v}{c}$ $\qquad \tanh\chi = \frac{v}{c}$,

die einen Boost in x-Richtung mit Geschwindigkeit v beschreibt. Zusätzlich sind auch Rotationen Lorentz Transformationen,

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} 1 & 0\;0\;0 \\ \begin{smallmatrix}0\\0\\0\end{smallmatrix} & \underbrace{R}_{\text{Rotations Matrix}} \end{pmatrix}$$

und die Raumspiegelung und Zeitumkehr

$$P = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \qquad T = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

Es lässt sich zeigen, dass jede Lorentztransformation als Produkt dieser einfachen Transformationen schreiben lässt.

Addition von Geschwindigkeiten:

Führen wir zwei Boost mit Geschwindigkeiten v_1 und v_2 in x-Richtung aus, so erhalten wir die Transformation:

$$\Lambda(v_1)\cdot\Lambda(v_2) = \begin{pmatrix} \cosh\chi_1 & -\sinh\chi_1 & & \\ -\sinh\chi_1 & \cosh\chi_1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cosh\chi_2 & -\sinh\chi_2 & & \\ -\sinh\chi_2 & \cosh\chi_2 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cosh(\chi_1+\chi_2) & -\sinh(\chi_1+\chi_2) & & \\ -\sinh(\chi_1+\chi_2) & \cosh(\chi_1+\chi_2) & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} = \Lambda(v_3)$$

, d.h. dies entspricht einem Boost mit der Geschwindigkeit

$$v_3 = c\cdot\tanh(\chi_1+\chi_2) \neq v_1+v_2$$

Die Geschwindigkeiten addieren sich nicht, sondern nur die Rapiditäten $\chi_3 = \chi_1+\chi_2$

Für die Geschwindigkeit gilt:

$$v_3 = \frac{v_1+v_2}{1+\frac{v_1 v_2}{c^2}}$$

Bem: v_3 ist immer kleiner als die Lichtgeschwindigkeit c.

5.3 Impuls und Energie

Das Differential

$$ds^2 = c^2 dt^2 - d\vec{x}^2 \equiv c^2 d\tau^2$$

ist Lorentzinvariant somit ist die Eigenzeit

$$d\tau = \frac{ds}{c} = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\, dt$$

eine Lorentzinvariante grösse und ein Skalar. Somit erhalten wir aus dem 4-Vektor

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} ct \\ \vec{x} \end{pmatrix}$$

einen neuen 4-Vektor

$$\underline{u} = \frac{d}{d\tau}\underline{x} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \frac{d}{dt}\underline{x}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \begin{pmatrix} c \\ \vec{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma c \\ \gamma \vec{v} \end{pmatrix}.$$

Bem: • Es gilt $\underline{u}\, g\, \underline{u} = \gamma^2 (c^2 - v^2) = c^2 = \text{const}$

und somit ist die Minkowski Metrik eine Konstante für alle Bewegungen.

• Die Geschwindigkeit $\vec{v}$ ist kein Anteil eines 4-Vektors

Wir definieren jetzt den 4-Impuls

$$\underline{p} = m\,\underline{u} = m \frac{d}{d\tau}\underline{x}$$

$$p^\mu = \begin{pmatrix} mc\gamma \\ m\vec{v}\gamma \end{pmatrix} \qquad p_\mu = g_{\mu\nu}\,p^\nu = \begin{pmatrix} mc\gamma \\ -m\vec{v}\gamma \end{pmatrix}$$

Somit gilt für den Impuls

$$p^\mu p_\mu = g_{\mu\nu}\,p^\mu p^\nu = m^2 c^2$$

Es folgt wieder, dass dieser 4-Impuls eine Erhaltungsgrösse ist, für ein geschlossenes System, der aus translations Invarianz folgt.

Daher hat die Zeitkomponente von $\underline{p}$ die Rolle der Energie:

$$p^\mu = \begin{pmatrix} E/c \\ \vec{p} \end{pmatrix}$$

mit

$$E = m\gamma c^2 = c\sqrt{m^2c^2 + \vec{p}^{\,2}}$$

$$\simeq \underbrace{mc^2}_{\text{Ruhe Energie}} + \underbrace{\tfrac{1}{2}mv^2}_{\text{nicht. rel. Energie}} + \frac{3}{8}m\frac{v^4}{c^2} + \ldots$$

Die Beschleunigung hat die Form

$$\underline{a} = \frac{d}{d\tau}\underline{u} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \begin{pmatrix} c \\ \vec{v} \end{pmatrix}\right]$$

$$= \gamma^2 \begin{pmatrix} 0 \\ \vec{a} \end{pmatrix} + \gamma^4 \frac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{c^2} \begin{pmatrix} c \\ \vec{v} \end{pmatrix}$$

und steht senkrecht auf dem Impuls

$$a^\mu p_\mu = \frac{1}{2}\frac{d}{d\tau} p^\mu p_\mu = 0 .$$

Bem: · Es gibt die veraltete Schreibweise, dass die Masse geschwindigkeitsabhängig ist

$$m(v) = \underbrace{m}_{\text{Ruhemasse}} \cdot \gamma$$

Diese Notation ist sehr unhandlich, und ~~sollte~~ vermieden werden.

· Für jedes Elementarteilchen ist sein 4-Impuls eine kovariante Grösse p^μ und seine Masse ist der Skalar $p^\mu p_\mu = c^2 m^2$

· Für Photonen gilt $m=0$ und somit

$\frac{E}{c} = |\vec{p}|$, was auf die Dispersion führt

$$\frac{\omega}{c} = |\vec{k}| .$$