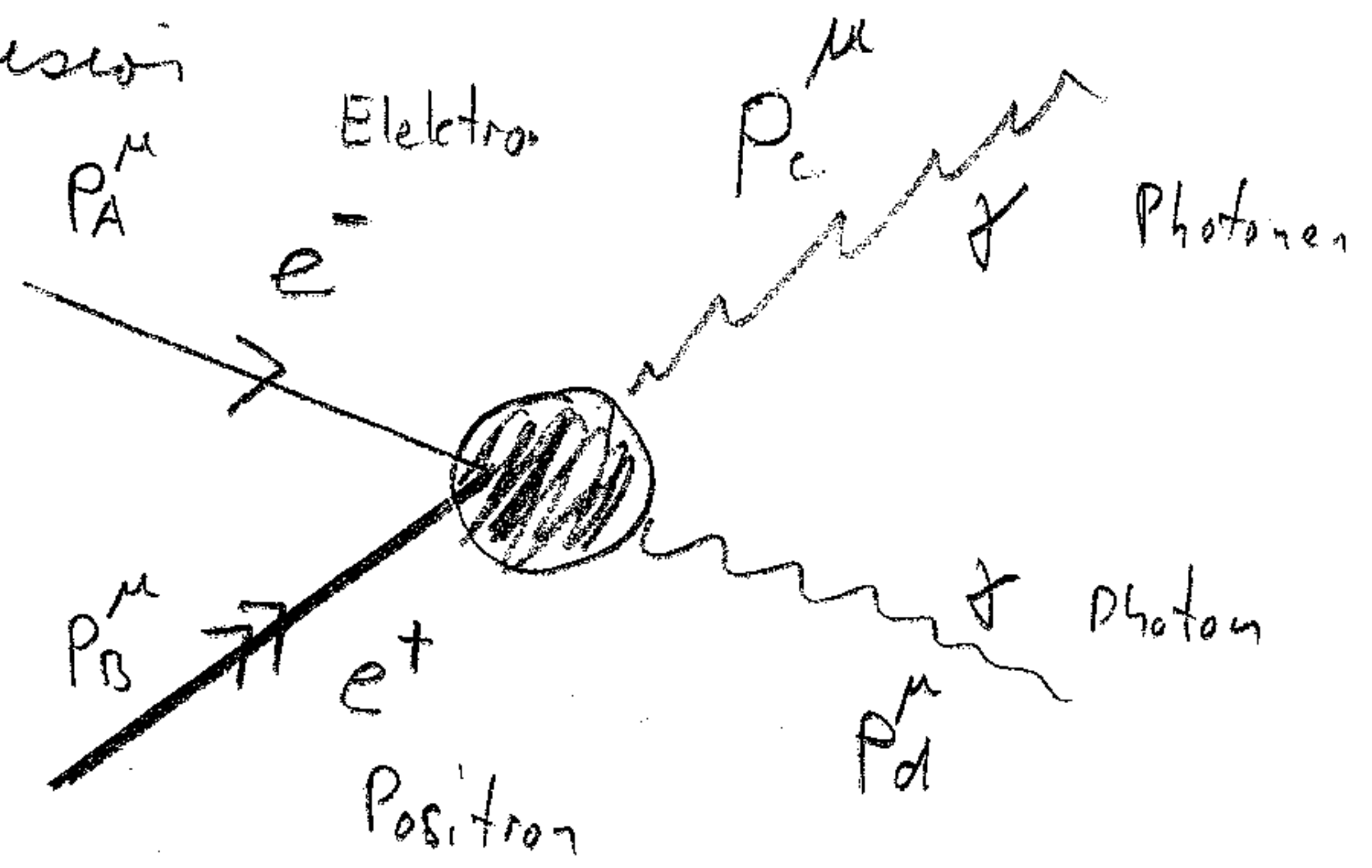


Bsp: • electron-positron Kollision

$$e^- + e^+ \rightarrow 2\gamma$$

• rel. Impuls und Energie
Erhaltung

$$p_A^\mu + p_B^\mu = p_C^\mu + p_D^\mu$$



• Elektron und Positron in Ruhe

$$\Rightarrow E_A + E_B = 2m_e c^2 = 2E_\gamma = E_C + E_D$$

\Rightarrow Ein Photon hat somit die Energie $m_e c^2$.

• Analog für andere Teilchen Prozesse



proton anti-
proton Pionen

- Die Sonne strahlt Energie ab in Form von Photonen. Durch diesen Energieverlust, wird die Sonne auch kühler.

Bem: Es gibt weitere wichtige 4-Vektoren:

- Wellenvektor von Lichtwellen

$$k^\mu = \begin{pmatrix} \omega/c \\ \vec{k} \end{pmatrix} \quad k_\mu = \begin{pmatrix} \omega/c \\ -\vec{k} \end{pmatrix}$$

Somit ist auch die Phase

$$e^{i x^\mu k_\mu} = e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x})}$$

eine skalare Grösse.

- Atom-Dichte: Ladungsdichte

$$j^\mu = \begin{pmatrix} \rho \\ \vec{j} \end{pmatrix}$$

Teilchenstrom Dichte

- el. mag. Potential

$$A^\mu = \begin{pmatrix} \phi \\ \vec{A} \end{pmatrix}$$

Skalar Potential
Vektor Potential

- ableitung Operator

$$\partial_\mu = \begin{pmatrix} \partial_t \\ \vec{\nabla} \end{pmatrix} \quad \partial^\mu = \begin{pmatrix} \partial_t \\ -\vec{\nabla} \end{pmatrix}$$

$$\square = \partial_\mu \partial^\mu = \partial^\mu \partial_\mu = \frac{1}{c^2} \partial_t^2 - \Delta \quad \text{: D'Alembert Operator}$$

- Eine weitere Grösse, die sich wie ein Tensor 2 Stufe verhält ist der el. mag. Feld Tensor:

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

Diese Grösse transformiert unter einer Lorentztransformation mit

$$(F^{\mu\nu})' = \Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\nu_\beta F^{\alpha\beta}$$

- Die Maxwell Gleichungen lauten

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = -\frac{4\pi}{c} j^\nu \quad : \text{Lorentz invariant}$$

$$\partial^\alpha F^{\mu\nu} + \partial^\mu F^{\nu\alpha} + \partial^\nu F^{\alpha\mu} = 0 \quad : \text{Lorentz invariant}$$

5.4 Dopplereffekt

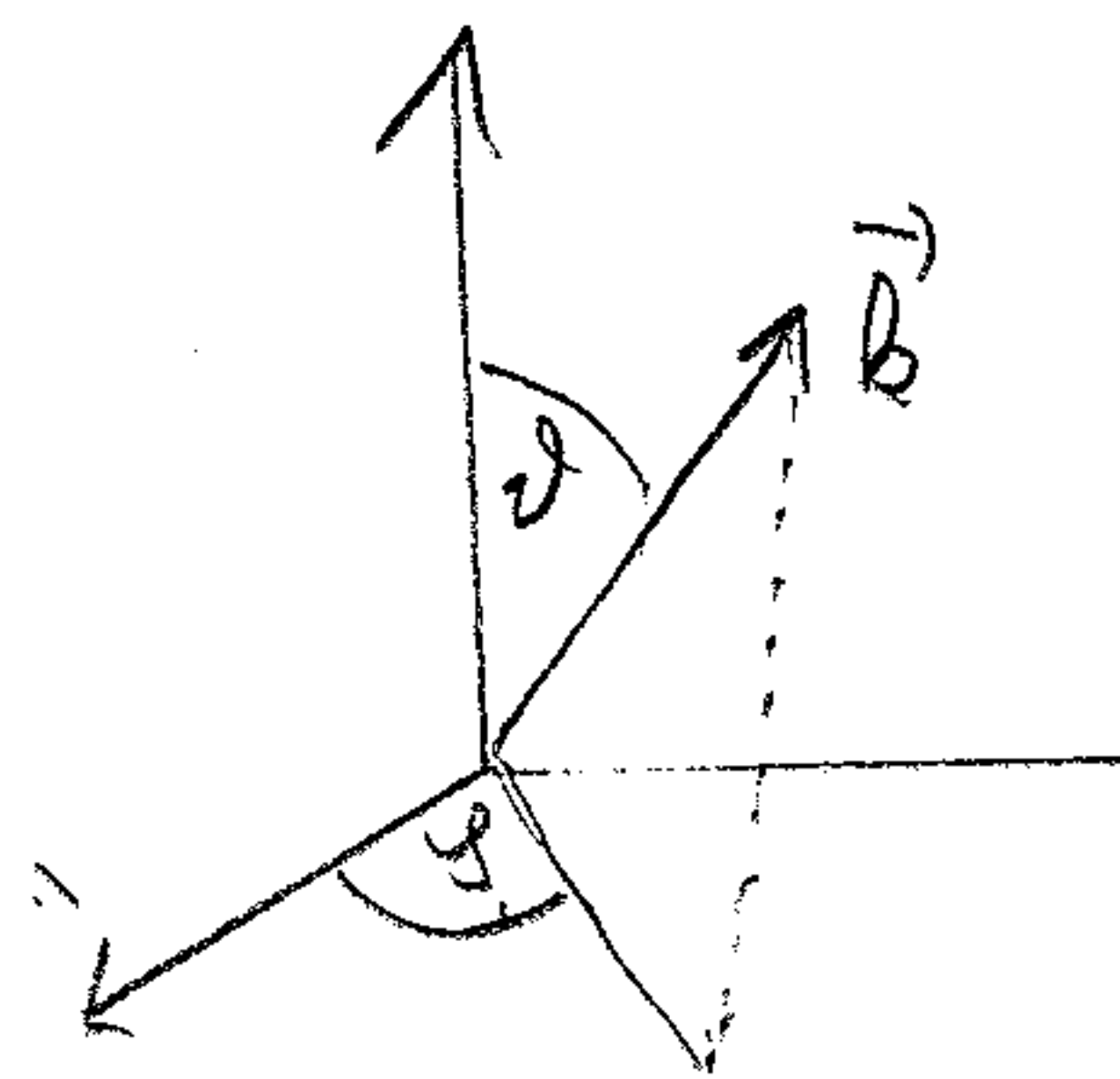
Der Wellenvektor $k^\mu = \begin{pmatrix} \omega/c \\ \vec{k} \end{pmatrix}$ transformiert sich wie der Ortsvektor x^μ .

Das Inertialsystem K' bewegt sich mit Geschwindigkeit v entlang der z -Achse von K .
Somit hat der Wellenvektor $k^{\mu'}$ im System K' die Form

$$\begin{aligned} k_x' &= k_x & k_z' &= \gamma (k_z - \beta \frac{\omega}{c}) \\ k_y' &= k_y & \omega' &= \gamma (\omega - v k_z) \end{aligned}$$

Stellen wir \vec{k} und \vec{k}' in Kugelkoordinaten dar mit $\frac{\omega}{c} = |\vec{k}|$ und $\frac{\omega'}{c} = |\vec{k}'|$
es folgt

$$\omega' = \gamma \omega (1 - \frac{v}{c} \cos \vartheta)$$



: rel. Doppler Effekt

Für Ausbreitung entlang der Boost, d.h. $\vartheta = 0$

$$\text{erhalten wir } \omega' = \omega \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}$$

$$\lambda' = \lambda \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}$$

5.5 Relativistisches Kraftgesetz

Für kleine Geschwindigkeiten $v \rightarrow 0$ gilt das Newtonsche Gesetz

$$\vec{F} = m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}$$

Wir können dies als 4-Vektor schreiben als

$$m \frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} = f^\alpha \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{d\tau} p^\alpha = f^\alpha$$

$$m \frac{d^2 \underline{x}}{d\tau^2} = \underline{f} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{d\tau} \underline{p} = \underline{f}$$

wobei im Ruhesystem die Kraft die Form haben muss

$$\underline{f}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \vec{F} \end{pmatrix}$$

\vec{F} : nicht-relativistische Kraft
für $\vec{v}=0$

Aus Invarianz der Bewegungsgleichung in allen Inertialsystemen folgt somit die Kraft

$$f^\alpha = \Lambda^\alpha_\beta(-\vec{v}) f_0^\beta$$

↳ Transformation ins Laborsystem

$$\underline{f} = \underline{1} \underline{f}_0$$

Somit erhalten wir die relativistische Kraft

$$f^\alpha = \begin{pmatrix} f^0 \\ \vec{f} \end{pmatrix}$$

mit $f^0 = \gamma \frac{\vec{v}}{c} \cdot \vec{F}$: Änderung der Energie

$$\vec{f} = \vec{F} + (\gamma - 1) \frac{\vec{v} \cdot \vec{F}}{v^2} \vec{v}$$

Für die el. Dynamik ergibt dies Kraftgleichung

$$\frac{d}{d\tau} p^\alpha = \frac{e}{c} F^{\alpha\beta} u_\beta \quad F_{\alpha\beta} : \text{el. mag. Feld Tensor}$$

$$\frac{d}{d\tau} p_\alpha = \frac{e}{c} F_{\alpha\beta} u^\beta$$

und in Komponenten

$$\frac{d}{dt} (\gamma m \vec{v}) = e \left(\vec{E} + \frac{1}{c} \vec{v} \wedge \vec{B} \right) : \text{Lorentzkraft}$$

$$\frac{d}{dt} (\gamma m c^2) = e \vec{E} \cdot \vec{v} : \text{geleistete Arbeit}$$

Bew: Im Ruhesystem haben wir nur die
elektrostatische

$$\vec{F} = e \vec{E} \quad : \quad \vec{E} \text{ ist Feld}$$

mit Hilfe des el. Feldtensors im Ruhesystem

$$F_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ +E_x & 0 & -B_z & B_y \\ +E_y & B_z & 0 & -B_x \\ +E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

gilt daher

$$f_0^\alpha = \begin{pmatrix} 0 \\ \vec{F} \end{pmatrix} = \frac{e}{c} F_0^{\alpha\beta} u_\beta$$

$$u_\beta^0 = g_{\beta\nu} u_0^\nu = g_{\beta\nu} \frac{d}{d\tau} x_0^\nu \\ = \begin{pmatrix} c \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad : \text{ Ruhesystem}$$

$$\Rightarrow f^\alpha = \Lambda^\alpha_\beta f_0^\beta = \frac{e}{c} \Lambda^\alpha_\beta F_0^{\beta\gamma} g_{\gamma\mu} u_0^\mu$$

$$= \frac{e}{c} \underbrace{\Lambda^\alpha_\beta F_0^{\beta\gamma} \Lambda^\delta_\gamma}_{F^{\alpha\delta}} g_{\delta\mu} \underbrace{\Lambda^\mu_\nu u_0^\nu}_{u^\delta \text{ im Laborsystem}}$$

$F^{\alpha\delta}$: Feldtensor im Laborsystem

$$= \frac{e}{c} F^{\alpha\delta} u_\delta$$

$$u_\delta = \begin{pmatrix} c\gamma \\ \gamma\vec{v} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{e}{c} \begin{pmatrix} c\gamma \vec{E} \cdot \vec{v} \\ c\gamma \vec{E} + \gamma \vec{v} \wedge \vec{B} \end{pmatrix}$$

$$= \gamma \frac{d}{dt} m e \vec{a} = \gamma \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \frac{E}{c} \\ m\gamma\vec{v} \end{pmatrix}$$

5.6 Variations Prinzip

Diese Bewegungsgleichung folgt aus dem relativistischen Wirkung

$$S_{\text{rel}} = \int d\lambda L$$

und dem Lagrange

$$L(x^\mu(\lambda), \frac{dx^\mu}{d\lambda})$$

$$= -mc \sqrt{g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}} - \frac{e}{c} A_\mu(x^\nu(\lambda)) \frac{dx^\mu}{d\lambda}$$

wobei $x^\mu(\lambda)$ eine Parametrisierung der Bewegungskurve ist. Die Wirkung ist Lorentzinvariant und unabhängig von der Parametrisierung λ .

• Die Variationsrechnung liefert

$$\frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\partial L}{\partial \frac{dx^\mu}{d\lambda}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x^\mu} = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \frac{dx^\mu}{d\lambda}} &= -\frac{1}{2} \frac{mc}{\sqrt{g_{\mu\nu}}} \cdot 2 \cdot \frac{d}{d\lambda} x^\mu - \frac{e}{c} A_\mu \\ &= -m \frac{dx^\mu}{d\lambda} - \frac{e}{c} A_\mu \end{aligned}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x^\mu} = -\frac{e}{c} \partial_\mu A_\nu \frac{dx^\nu}{d\lambda}$$

$$\frac{d}{d\lambda} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} = -m \frac{d}{d\lambda} \frac{dx^\mu}{d\lambda} - \frac{e}{c} \partial_\nu A_\mu \cdot \frac{d}{d\lambda} x^\nu$$

Somit folgt mittels der Euler-Lagrange Gleichungen

$$m \frac{d^2}{d\lambda^2} x^\mu = \frac{e}{c} \frac{d}{d\lambda} x^\nu \underbrace{\left[\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \right]}_{F_{\mu\nu}}$$

Setze $\lambda = \tau$ der Eigenzeit und es folgt

$$\frac{d}{d\tau} p_\mu = \frac{e}{c} F_{\mu\nu} \dot{x}^\nu$$

Bem: Für $\lambda = t$ und kleine Geschwindigkeiten $v \ll c$ erhalten wir die klassische Lagrangianfunktion und Wirkung

$$S_{\text{rel}} \rightarrow \int dt L$$

$$L \rightarrow \underbrace{-mc^2}_{\text{irrelevante Konstante}} + \underbrace{\frac{m}{2} v^2}_T - e\varphi + \underbrace{\frac{e}{c} \vec{v} \cdot \vec{A}}_V \quad \text{Anteil für Lorentzkraft}$$