7 Hamilton'sche Dynamik

Ein teilchen im Potential ist beschrieben durch,

$$L(q, \dot{q}) = \frac{m}{2}\dot{q}^2 - V(q).$$

Hierbei sind q und $\dot{q}$ sind unabhängig von einander. Die Euler-Lagrange-Gleichungen, die eine Bezeihung zwischen Ihnen herstellen sind Differentialgleichungen 2. Ordnung.

Wir wollen nun zu neuen Koordinaten q, p übergehen, so dass wir eine Differentialgleichung 1. Ordnung erhalten.

Der hamilton'sche Impuls $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$ erfüllt die Relationen

$$\begin{aligned} \dot{q} &= \frac{p}{m} \\ m\ddot{q} &= -\frac{\partial V}{\partial q} \end{aligned}$$

Wir wollen diese Relationen durch eine neue Funktion H beschreiben,

$$\begin{aligned} \dot{q} &= \frac{p}{m} = \frac{\partial H}{\partial p}, \\ \dot{p} &= -\frac{\partial V}{\partial q} = -\frac{\partial H}{\partial q}. \end{aligned}$$

Diese Funktion heißt Hamiltonfunktion und ist gegeben durch,

$$H(q, p) = \frac{p^2}{2m} + V(q).$$

Die Gleichungen

$$\begin{aligned} \dot{q} &= \frac{p}{m} = \frac{\partial H}{p} \\ \dot{p} &= -\frac{\partial V}{\partial q} = -\frac{\partial H}{\partial q} \end{aligned}$$

heißen Hamilton'sche Bewegungsgleichungen, (q, p) sind harmonische Variablen.

7.1 Legendre Transformation

Wir betrachten die Funktion $f(x)$ mit Variable x und definieren uns eine neue Funktion $g(y)$ mit der neuen Variablen y mittels,

$$\begin{aligned} y &:= \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}, \\ g(y) &:= [xy - f(x)](y). \end{aligned}$$

Um die "alte"Variable x durch einen von y-abhängigen Ausdruck ersetzen zu können, muss die Gleichung $y = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ nach x aufgelöst werden $x(y)$. Dies ist nur dann eindeutig, falls $\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2} \neq 0$ für alle x.

Bsp Sei $f(x) = x^2$, dann ist $y = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = 2x \Rightarrow x = \frac{1}{2}y$. Die Legendre-Transformierte $g(y) = xy - f(x)$ ist gegeben durch,

$$g(y) = \frac{y^2}{2} - x^2 = \frac{y^2}{2} - \frac{y^2}{4} = \frac{y^2}{4}. \quad \blacksquare$$

Geometrische Deutung. Die Legendre-Transformation beschreibt die Funktion f in eindeutiger Weise, indem sie jeder Steigung $y = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ den y-Achsen-Abschnitt der dort anliegenden Tangente zuordnet. Die Funktion f wird somit vollständig durch ihre Einhüllenden charakterisiert. ⊸

7.1 **Theorem** *Die Legendre-Transformation von $g(y)$ ergibt wieder die Funktion $f(x)$, falls $g(y)$ die Legendre-Transformation von $f(x)$ ist.* ⋊

» Betrachte dazu,

$$\begin{aligned} z = \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}y} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left[xy - f(x)\right](y) = x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}y + y\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}x - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}f(x) \\ &= x + y\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}x - \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = x + \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} - \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}. \end{aligned}$$

Die Legendre-Transformation von $g(y)$ ist

$$h(z) = zy - g(y) = zy - \left[xy - f(x)\right](y) = xy - \left[xy - f(x)\right] = f(x). \quad «$$

7.2 Hamilton-Funktion und Hamiltonsche Bewegungsgleichung

Wir erhalten die Hamiltonfunktion indem wir eine Legendre-Transformation auf die Lagrangefunktion anwenden,

$$L(q^\alpha, \dot{q}^\alpha, t).$$

Dabei sei q^α fest und unsere neue Variable gegeben durch,

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha}, \qquad \text{Kanonischer Impuls.}$$

die Legendre-Transformation ist nun gegeben durch,

$$H(q^\alpha, p^\alpha, t) = \left[\sum_\alpha p_\alpha \dot{q}^\alpha - L\right]_{q^\alpha, p^\alpha, t}.$$

Um die Bewegungsgleichungen zu erhalten, betrachte das Differential,

$$\begin{aligned} \mathrm{d}H &= \sum_\alpha \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} \mathrm{d}p_\alpha + \frac{\partial H}{\partial q^\alpha} \mathrm{d}q^\alpha + \frac{\partial H}{\partial t} \mathrm{d}t \overset{!}{=} \mathrm{d}\left[\sum_\alpha p_\alpha \dot{q}^\alpha - L\right] \\ &= \left[\sum_\alpha \dot{q}^\alpha \mathrm{d}p_\alpha - p_\alpha \mathrm{d}\dot{q}^\alpha - \frac{\partial L}{\partial q^\alpha} \mathrm{d}q^\alpha - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \boxed{\mathrm{d}q^\alpha}\right] + \frac{\partial L}{\partial t} \mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Somit folgt für die Bewegungsgleichungen,

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} &= \dot{q}^\alpha, \\ \frac{\partial H}{\partial q^\alpha} &= -\dot{p}_\alpha. \end{aligned}$$

Die Hamiltonfunktion und die Hamilton'schen Bewegungsgleichungen sind äquivalent zur Lagrangefunktion und den Euler-Lagrange-Gleichungen.

Alternative Herleitung. Obwohl das totale Differential dH sehr elegant auf die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen führt, wollen wir noch eine alternative Herleitung betrachten.

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} &= \frac{\partial}{\partial_\alpha}\left[\sum_\beta \dot{q}^\beta p_\beta - L\right] = \dot{q}^\alpha + \sum_\beta p_\beta \frac{\partial \dot{q}^b \boxed{eta}}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial L}{\partial p_\alpha} \\ &= \dot{q}^\alpha + \sum_\beta \frac{\partial \dot{q}^\beta}{\partial p_\alpha}\left[p_\beta - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\beta}\right] = \dot{q}^\alpha. \end{aligned}$$

Die Rechnung für $\frac{\partial H}{\partial q^\alpha}$ funktioniert analog. $\multimap$

Bsp 1.) Sei $L(q,\dot{q}) = \frac{m}{2}\dot{q}^2 - V(q)$. Wir wollen die Hamiltonfunktion nun mit Hilfe der Legendretransformation bere chnen,

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m\dot{q} \Rightarrow \dot{q} = \frac{p}{m}.$$

$$H(q,p) = \dot{q}p - L = p\left(\frac{p}{m}\right) - \frac{m}{2}\left(\frac{p}{m}\right)^2 + V(q) = \frac{p^2}{2m} + V(q).$$

Die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen lauten,

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial q} = \frac{p}{m}.\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -V'(q) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\dot{q}) = m\ddot{q}.$$

2.) Wir betrachten die Lagrange in Polarkoordinaten,

$$L(r,\varphi,\dot{r},\dot{\varphi}) = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right) - V(r).$$

Die Impulse haben nun die Form,

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \Rightarrow \dot{r} = \frac{p_r}{m},$$
$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi} \Rightarrow \dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{mr^2}.$$

Die Hamiltonfunktion ist daher

$$\begin{aligned} H(r,\varphi,p_r,p_\varphi) &= p_\varphi\dot{p} + p_r\dot{r} - L(r,\varphi,\dot{r},\dot{\varphi}) \\ &= \frac{p_\varphi^2}{mr^2} + \frac{p_r^2}{m} - \frac{m}{2}\left(\frac{p_r}{m}\right)^2 - \frac{m}{2}r^2\left(\frac{p_\varphi}{mr^2}\right)^2 + V(r) \\ &= \frac{1}{2}\frac{p_\varphi^2}{mr^2} + \frac{1}{2}\frac{p_r^2}{m} + V(r). \end{aligned}$$

φ ist zyklisch, d.h. p_φ ist erhalten. Im Lagrange müssten wir noch $\dot{\varphi}$ durch p_φ ausdrücken, in der Hamiltonfunktion ist dies nicht mehr notwendig.

3.) Teilchen im äußeren EM-Feld.

$$
\begin{aligned}
L(\vec{x}, \dot{\vec{x}}) &= \frac{m}{2}\dot{\vec{x}}^2 - e\left(\varphi(\vec{x}) - \frac{\dot{\vec{x}}}{c}\vec{A}\right) \\
\vec{p}_x &= m\dot{\vec{x}} + \frac{e}{c}\vec{A} \\
H(\vec{x}, \vec{p}_x) &= \vec{p}\dot{\vec{x}} - \frac{m}{2}\dot{\vec{x}}^2 + e\phi(\vec{x})\frac{\dot{\vec{x}}}{c} \\
&= \frac{\vec{p}}{m}\left(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A}\right) + \frac{m}{2}\left(\frac{\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A}}{m}\right)^2 \\
&\quad + e\phi(\vec{x}) - \left(\frac{\vec{p}}{cm} - \frac{e}{c^2 m}\vec{A}\right)e\vec{A} \\
&= \frac{\vec{p}^2}{m} - \frac{2e}{cm}\vec{p}\vec{A} + \frac{1}{m}\left(\frac{e}{c}\right)^2\vec{A}^2 - \frac{1}{2m}\left(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A}\right)^2 + e\phi(\vec{x}) \\
&= \frac{\left(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A}\right)^2}{m} - \frac{1}{2m}\left(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A}\right)^2 + e\phi(\vec{x})
\end{aligned}
$$

Bemerkung. Falls das Problem mit verallgemeinerten Koordinaten zeitunabhängig ist, so gilt,

$$L = T - V \Rightarrow H = T + V$$

und der Wert von H ist die Energie, denn

$$H = \underbrace{\sum_\alpha \dot{p}^\alpha p_\alpha}_{2T} - \underbrace{L}\,\boxed{T - V} = T + V.$$

Die allgemeine Form der kinetischen Energie ist,

$$T = \sum_{\alpha,\beta} g_{\alpha\beta}\dot{q}^\alpha\dot{q}^\beta.$$

7.3 Poissio[illegible]mmern

Wir betrachten eine Messgröße $F(q, p, t)$ und berechnen ihre Zeitableitung.

Bsp $L_z = xp_y - yp_x$, Drehimpuls in z-Richtung. ■

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} &= \frac{\partial F}{\partial t} + \sum_\alpha \left[\frac{\partial F}{\partial q^\alpha}\frac{\partial q^\alpha}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial p_\alpha}\frac{\partial p_\alpha}{\partial t} \right] = \frac{\partial F}{\partial t} + \sum_\alpha \left[\frac{\partial F}{\partial q^\alpha}\frac{\partial H}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial F}{\partial p_\alpha}\frac{\partial H}{\partial q^\alpha} \right] \\
&\equiv \frac{\partial F}{\partial t} + \{F, H\}\,.
\end{aligned}
$$

Dabei haben wir die Poissonklammer eingeführt, die definiert ist als

$$
\{A, B\} := \sum_\alpha \left[\frac{\partial A}{\partial q^\alpha}\frac{\partial B}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial A}{\partial p_\alpha}\frac{\partial B}{\partial q^\alpha} \right].
$$

Bemerkung. Falls F nicht explizit von der Zeit abhängig ist, d.h. $\frac{\partial F}{\partial t} = 0$, ist $F(q,p)$ genau dann eine Erhaltungsgröße, wenn $\{F, H\} = 0$.

Falls H nicht explizit von der Zeit abhängig ist, ist H erhalten,

$$
\{H, H\} = \sum_\alpha \left[\frac{\partial H}{\partial q^\alpha}\frac{\partial H}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial H}{\partial p_\alpha}\frac{\partial H}{\partial q^\alpha} \right]. \qquad \multimap
$$

Spezialfälle. Sei $F = q^\alpha$ oder p_α, so ist $\frac{\partial F}{\partial t} = 0$ und,

$$
\begin{aligned}
\dot{q}^\alpha &= \{q^\alpha, H\} = \sum_\beta \left[\frac{\partial q^\alpha}{\partial q^\beta}\frac{\partial H}{\partial p^\beta} - \frac{\partial q^\alpha}{\partial p_\beta}\frac{\partial H}{\partial q^\beta} \right] = \frac{\partial H}{\partial p^\alpha} \\
\dot{p}_\alpha &= \{p_\alpha, H\} = \sum_\beta \left[\frac{\partial p_\alpha}{\partial q^\beta}\frac{\partial H}{\partial p_\beta} - \frac{\partial p_\alpha}{\partial p_\beta}\frac{\partial H}{\partial q^\beta} \right] = -\frac{\partial H}{\partial q^\alpha}. \qquad \multimap
\end{aligned}
$$

Eigenschaften *Die Poisson-Klammer ist ein bilinearer Differentialoperator mit den Eigenschaften,*

(i) $\{A, B + C\} = \{A, B\} + \{A, C\}$, *Linearität,*

(ii) $\{A, B\} = -\{B, A\} \Rightarrow \{A, A\} = 0$, *Antisymmetrie,*

(iii) $\{A, c\} = 0$ *für* $c \in \mathbb{R}$,

(iv) $\{A, \{B, C\}\} + \{B, \{C, A\}\} + \{C, \{A, B\}\} = 0$, *Jacobi Identität.* $\rtimes$

Bemerkung. $\{q^\alpha, p_\beta\} = \delta_{\alpha\beta}$.

» $\sum_\gamma \underbrace{\frac{\partial q^\alpha}{\partial q^\gamma}}_{\delta_{\alpha\beta}} \underbrace{\frac{\partial p_\beta}{p_\gamma}}_{\delta_{\beta\gamma}} - \underbrace{\frac{\partial q^\alpha}{\partial p_\gamma}}_{0} \underbrace{\frac{\partial p^\beta}{\partial q^\gamma}}_{0}.$ « $\multimap$

■ Symplektische Notation

Die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen lassen sich in einer Gleichung in folgender Form zusammenfassen,

$$\begin{pmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}_{\varepsilon_{ij}} \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial q} \\ \frac{\partial H}{\partial p} \end{pmatrix},$$

wobei ε_{ij} den antisymmetrischen Tensor bezeichnet.

Wir definieren nun einen neuen Vektor,

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} q^1 \\ \vdots \\ q^f \\ p^1 \\ \vdots \\ p^f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^{2f} \end{pmatrix},$$

$$\frac{\partial x^i}{\partial t} = \sum_j \varepsilon_{ij} \frac{\partial H}{\partial x_j},$$

mit dem total antisymmetrischen Tensor

$$\bar{\varepsilon} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ -1 & 0 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Zur Abkürzung führen wir folgende Notation ein,

$$\frac{\mathrm{d}\bar{x}}{\mathrm{d}t} = \bar{\varepsilon} \frac{\partial H}{\partial \bar{x}} = \bar{\varepsilon} \nabla H(\bar{x})$$

$$\{A, B\} = \sum_{i,j} \frac{\partial A}{\partial x^i} \varepsilon_{ij} \frac{\partial B}{\partial x^j} = \frac{\partial A}{\partial \bar{x}} \bar{\varepsilon} \frac{\partial B}{\partial \bar{x}}.$$

7.4 Extremalprinzip

Analog zum Lagrange existiert ein Extremalprinzip zu dem die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen äquivalent sind.

Für die Lagrangefunktion impliziert eine Variation von $q(t)$ auch eine Variation von $\dot{q}(t)$. Die Euler-Lagrange-Gleichungen sind das Extremal der Wirkung

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\, L(q(t), \dot{q}(t), t).$$

Für die Hamiltonfunktion sind nun $q(t)$ und $p(t)$ voneinander unabhängige Größen. Übetragen wir die Wirkung für die Lagrangefunktion auf den Hamilton, ergibt sich,

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\, \underbrace{\sum_\alpha p_\alpha \dot{q}^\alpha - H(q^\alpha, p_\alpha, t)}_{L'},$$

wobei L' hier für den Zahlenwert der Lagrangefunktion zum Zeitpunkt t steht.

Anwendung der Euler-Lagrange-Gleichungen auf die unabhängigen Größen q^α und p^β ergibt,

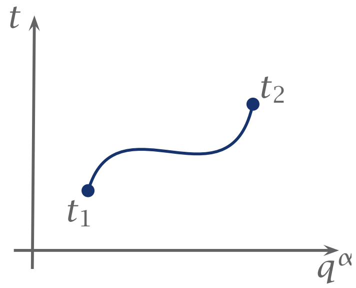
$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}^\alpha} - \frac{\partial L}{\partial q^\alpha} &= 0,\\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L'}{\partial \dot{p}^\alpha} - \frac{\partial L}{\partial p^\alpha} &= 0.
\end{aligned}$$

Einsetzen des Ausdrucks für L' führt wieder auf die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen,

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}^\alpha} = p_\alpha\\
\Rightarrow &\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} p_\alpha = \dot{p}_\alpha = \frac{\partial L'}{\partial q^\alpha} = -\frac{\partial H}{\partial q^\alpha}\\
&\frac{\partial L'}{\partial \dot{p}_\alpha} = 0\\
\Rightarrow &0 = \frac{\partial L'}{\partial p_\alpha} = \dot{q}^\alpha - \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} \Rightarrow \dot{q}^\alpha = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha}.
\end{aligned}$$

Bemerkung. Die Wirkung entlang einer physikalischen Bahn mit $H = E$ ist gegeben durch,

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \left[\sum_\alpha p_\alpha \dot{q}^\alpha - H \right] = \sum_\alpha \int_\gamma p_\alpha {''}^{\alpha} - E(t_2 - t_1). \quad ⊸$$



43 **Wirkung entlang einer Trajektorie**

7.5 Kanonische Transformationen

Wir wollen nun untersuchen, welche Transformationen die Hamiltonfunktion invariant lasssen. Für die Newtonschen Gleichungen waren das lediglich die Galilei-Transformationen. Der Lagrangeformalismus hingegen ist invariant unter beliebigen Transformationen, d.h.

$$\begin{aligned} Q^\alpha &= f(q^\beta, t) \\ \dot{Q}^\alpha &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(q^\beta, t) \end{aligned}$$

für jede Transformation f im Konfigurationsraum. Beispielsweise ließen sich durch das Einführen von Kugelkoordinaten zahlreiche Probleme leicht auflösen bzw. reduzieren.

Im Hamiltonformalismus sind q^α und p^α von einander unabhängig, d.h. Transformationen können p^α ändern während sie q^α invariant lassen und umgekehrt. Im Lagrangeformalismus waren durch die feste Verknüpfung von q und $\dot{q}$ beliebige Transformationen zugelassen.

Die Klasse von Transformationen im Phasenraum ((q, p)-Raum), die die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen invariant lassen heißen kanonische Transformationen.

Wir wollen uns zunächst auf die wichtigste Untergruppe dieser Transformationen

$$(q^\alpha, p^\alpha) \mapsto (Q^\alpha, P^\alpha)$$

beschränken, die die folgenden Eigenschaften erfüllen:

(i) zeitunabhängig,

(ii) kontinuierlich in einem Parameter s.

Wir betrachten eine Messgröße F, die nicht explizit von der Zeit abhängt, entlang einer Bewegungskurve. Aufgrund der zeitunabhängigkeit der Transformation ist $\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}$ invariant,

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} = \{F, H\}_{q,p} = \{F, H\}_{Q,P} \,,$$

d.h. die Poissonklammer in neuen und alten Koordinaten ist identisch. Da dies für alle Hamiltonfunktionen gelten muss, folgt allgemein

$$\begin{aligned}
&\{A, B\}_{q,p} = \{A, B\}_{Q,P} \,, \\
&\sum_\alpha \frac{\partial A}{\partial q^\alpha}\frac{\partial B}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial A}{\partial p_\alpha}\frac{\partial B}{\partial q^\alpha} = \sum_\alpha \frac{\partial A}{\partial Q^\alpha}\frac{\partial B}{\partial P_\alpha} - \frac{\partial A}{\partial P_\alpha}\frac{\partial B}{\partial Q^\alpha} ,
\end{aligned}$$

bzw. in symplektischer Schreibweise,

$$\sum_{i,j} \frac{\partial A}{\partial \overline{x}_i}\overline{\overline{\varepsilon}}_{ij}\frac{\partial B}{\partial \overline{x}_j} = \sum_{i,j} \frac{\partial A}{\partial \overline{y}_i}\overline{\overline{\varepsilon}}_{ij}\frac{\partial B}{\partial \overline{y}_j} ,$$

wobei

$$\overline{x} = \begin{pmatrix} q^1 \\ \vdots \\ q^f \\ p^1 \\ \vdots \\ p^f \end{pmatrix} , \qquad \overline{y} = \begin{pmatrix} Q^1 \\ \vdots \\ Q^f \\ P^1 \\ \vdots \\ P^f \end{pmatrix} .$$

Spezialfall. $A = P_\alpha$, $B = Q^\beta \Rightarrow \left\{P_\alpha, Q^\beta\right\}_{q,p} = \left\{P_\alpha, Q^\beta\right\}_{Q,P} = \delta_{\alpha\beta}$.

Bsp Sei $Q^\beta = \lambda q^\beta$, so folgt $P_\alpha = \frac{1}{\lambda} p_\alpha$, denn $\{Q^\alpha, P_\alpha\} = \delta_{\alpha\beta}$. ■

Seien $\overline{y}$ die neuen und $\overline{x}$ die alten Koordinaten in symplektischer Notation, so ergibt sich,

$$\left\{y_i, y_j\right\}_x = \bar{\varepsilon}_{ij} = \sum_{l,m} \frac{\partial y_i}{\partial x_k} \varepsilon_{lm} \frac{\partial y_j}{\partial x_m} = \varepsilon_{ij}$$

Bezeichne $M_{il} := \frac{\partial y_i}{\partial x_l}$ die Funktionalmatrix der kanonischen Transformation, so gilt

$$M \varepsilon M^\top = \varepsilon. \quad \multimap$$

Definition *Die Symplektische Gruppe*

$$Sp(f, \mathbb{R}) := \left\{M \in \mathbb{R}^{2f \times 2f} : M\varepsilon M^\top = \varepsilon\right\}.$$

ist die Gruppe der $2f \times 2f$-Matritzen mit $M\varepsilon M^\top = \varepsilon$. ⋊

Entwickeln wir $\overline{y}$ in s, so ergibt sich,

$$y_i = x_i + s \cdot v_i + o(s^2),$$

mit $\overline{v}_i(x) = \left.\frac{\partial y_i}{\partial s}\right|_{s=0}$. Differentiation der Entwicklung nach x_k ergibt,

$$M_{ik} = \frac{\partial y_i}{\partial x_k} = \delta_{ik} + s \underbrace{\frac{\partial v_i}{\partial x_k}}_{=: m_{ik}},$$

d.h. wir können die Funktionalmatrix M in s entwickeln,

$$M = \mathrm{Id} + \ldots\, o(s^2).$$

Einsetzen in die Bedingung für eine kanonische Transformation ergibt,

$$\begin{aligned} \varepsilon = M\varepsilon M^\top &= \left(\mathrm{Id} + s\, m + o(s^2)\right) \varepsilon \left(\mathrm{Id} + s\, m + o(s^2)\right) \\ &= \varepsilon + s\left[m\varepsilon + \varepsilon m^\top\right] + o(s^2) \\ \Rightarrow m\varepsilon + \varepsilon m^\top &= 0 \end{aligned}$$

Multiplikation von rechts und links mit ε unter verwendung von $\varepsilon^2 = \mathrm{Id}$ und $\varepsilon^\top = -\varepsilon$ ergibt,

$$\varepsilon m \varepsilon^2 + \varepsilon^2 m^\top \varepsilon = 0 \Leftrightarrow \varepsilon m - m^\top e^\top = 0 \Leftrightarrow \varepsilon m - (\varepsilon m)^\top = 0. \tag{*}$$

Setze nun

$$\sum_j e_{ij} m_{jk} = \sum_j e_{ij} \frac{\partial v_j}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} \underbrace{\left(\sum_j \varepsilon_{ij} v_j \right)}_{=:g_i},$$

so nimmt (*) die Form an,

$$\frac{\partial g_i}{\partial x_k} - \frac{\partial g_k}{\partial x_i} = 0.$$

In drei Dimensionen wäre dies äquivalent damit, dass $\operatorname{rot} g = 0$. Hier haben wir die höherdimensionale Verallgemeinerung. Analog zum dreidimensionalen Fall existiert daher ein Skalarfeld G so, dass

$$g_i = -\nabla_i G = -\frac{\partial G}{\partial x_i}(\overline{x}).$$

G heißt Erzeugende Funktion für die kanonische Transformation (bzw. den kanonischen Fluss).

■ Zusammenfassung

1.) $v_i = \frac{\mathrm{d}y_i}{\mathrm{d}s}\Big|_{s=0} = -\sum_j \varepsilon_{ij} g_j = \sum_j \varepsilon \frac{\partial G}{\partial y_j}$.

2.) Zu jeder kanonischen Transformation g existiert eine erzeugende Funktion G.

3.) Jede Funktion G erzeugt eine kanonische Transformation.

Insbesondere erzeugt die Hamiltonfunktion eine kanonische Transformation. Diese ist die Transformation im Koordinatenraum, die zu gegebenen Anfangsbedingungen die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen liefert.

Bsp *Erzeugende für eine Drehung um die z-Achse.* Die Drehung ist charakterisiert durch,

$$\vec{y} = \vec{x} + s\vec{v} \times \vec{x}.$$

Dabei ist,

$$\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}s} = -x_2$$
$$\frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}s} = x_1$$
$$\frac{\mathrm{d}y_3}{\mathrm{d}s} = 0.$$

D.h. $G = L_3 = x_1 p_2 - x_2 p_1$, die z-Komponente des Drehimpulses, ist Erzeugende für die Rotation.

Ananlog sieht man, dass der Impuls die Erzeugende für die Translation im Raum ist. ■

■ Symmetrien und Erhaltungssätze

Eine kanonische Transformation g ist eine Symmetrie, wenn sie die Hamiltonfunktion nicht ändert,

$$0 = \frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}s}(\overline{y}) = \sum_i \frac{\partial H}{\partial y_i}\frac{\partial y_i}{\partial s} = \sum_{i,j} \frac{\partial H}{\partial y_i}\varepsilon_{ij}\frac{\partial G}{\partial y_j} = \{H, G\}.$$

D.h. g ist genau dann eine Symmetrie, wenn die Poissonklammer von H und ihrer Erzeugenden G verschwindet.

Die Erzeugende einer Symmetrie ist daher stets eine Erhaltungsgröße, denn

$$\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}t} = \{G, H\} = 0.$$

7.6 Endliche kanonische Transformationen

Die Transformation lässt die Bewegungsgleichungen

$$\dot{q}^\alpha = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha}, \quad \dot{p}_\alpha = -\frac{\partial H}{\partial q^\alpha}$$

invariant. In neuen Koordinaten,

$$\dot{Q}^\alpha = \frac{\partial H'}{\partial P_\alpha}, \quad \dot{P}_\alpha = -\frac{\partial H'}{\partial Q^\alpha}.$$

Falls H zeitabhängig ist, erhalten wir eine neue Hamiltonfunktion H'.

Die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen sind äquivalent zum Hamiltonschen Prinzip der kleinsten Wirkung,

$$\delta\left(\sum_\alpha p_\alpha \dot{q}^\alpha - H\right) = 0,$$
$$\delta\left(\sum_\alpha P_\alpha \dot{Q}^\alpha - H'\right) = 0,$$

d.h. $\sum_\alpha p_\alpha \dot{q}^\alpha - H$ und $\sum_\alpha P_\alpha \dot{Q}^\alpha - H'$ dürfen sich lediglich um eine totale Zeitableitung unterscheiden. Dies ergibt eine neue Funktion,

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} = \sum_\alpha p_\alpha \dot{q}^\alpha - P_\alpha \dot{Q}^\alpha - (H - H'),$$
$$\mathrm{d}F = \sum_\alpha p_\alpha \,\mathrm{d}q^\alpha - P_\alpha \,\mathrm{d}Q^\alpha - (H - H')\,\mathrm{d}t\,.$$

Wir nehmen an, dass $F(q, Q, t)$ die Form,

$$\mathrm{d}F = \sum_\alpha p_\alpha \,\mathrm{d}q^\alpha - P_\alpha \,\mathrm{d}Q^\alpha - \frac{\partial F}{\partial t}\,\mathrm{d}t$$

hat. Dadurch ergeben sich die Bedingungen,

$$\frac{\partial F}{\partial q^\alpha} = p_\alpha, \quad -\frac{\partial F}{\partial Q^\alpha} = P_\alpha.$$

Unter diesen Bedingungen erzeugt F eine kanonische Transformation.

Bsp Betrachte den Harmonischen Oszillator mit,

$$H = \frac{p^2}{2m} + k\frac{q^2}{2}, \quad \omega^2 = \frac{k}{m}.$$

Durch kühne Überlegung erhält man die Erzeugende,

$$F = \frac{m\omega q^2}{2}\cot(Q),$$

dann ist

$$
\begin{aligned}
p &= \frac{\partial F}{\partial q} = m\omega q \cot Q, \\
P &= -\frac{\partial F}{\partial Q} = -\frac{m\omega q^2}{2}\frac{1}{\sin^2 Q}.
\end{aligned}
$$

Auflösen der Gleichung ergibt,

$$
\begin{aligned}
q &= \sqrt{\frac{2P}{m\omega}}\sin Q \\
p &= \sqrt{2Pm\omega}\cos Q.
\end{aligned}
$$

Die neue Hamiltonfunktion hat die Form,

$$
\begin{aligned}
H' &= H + \underbrace{\frac{\partial F}{\partial t}}_{=0} = \frac{2Pm\omega\cos^2 Q}{2m} + \omega^2 m\frac{2P}{\omega}\frac{\sin^2 Q}{2} \\
&= P\omega\cos^2 Q + P\omega\sin^2 Q = P\omega.
\end{aligned}
$$

Nach der kanonischen Transformation ist Q eine zyklische Koordinate,

$$
\begin{aligned}
Q &= \omega t + \varphi, \\
E &= \omega P \Rightarrow P = \frac{E}{\omega}. \quad \blacksquare
\end{aligned}
$$

7.7 Hamilton-Jacobi Differentialgleichungen

Wir wollen nun untersuchen, welche kanonische Transformation F_2 zur Folge hat, dass

$$
\begin{aligned}
&H'(Q^\alpha, P_\alpha) = \text{const} = 0, \\
&\boxed{\dot{Q}^\alpha} = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} = 0 \\
&\boxed{\dot{P}_\alpha} = -\frac{\partial H}{\partial q^\alpha} = 0.
\end{aligned}
$$

Wir erhalten so eine Differentialgleichung, deren Lösung die gesuchte kanonische Transformation ist.

Die Erzeugende dieser Transformation ist die Wirkung,

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\, L.$$

Betrachte nun zu festem Anfangspunkt q^α, $S(q^\alpha, t)$ als Funktion des Endpunkts für *physikalische Bahnen*. Für die Ortsableitung ergibt sich,

$$\begin{aligned}\frac{\partial S}{\partial q^\alpha} &= \frac{\partial}{\partial q^\alpha} \int_{t_1}^{t} \mathrm{d}t\, L = \int_{t_1}^{t} \mathrm{d}s\, \frac{\partial L}{\partial q^\alpha} + \sum_\beta \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\beta} \frac{\partial \dot{q}^\beta}{\partial q^\alpha} \\ &= \underbrace{\int_{t_1}^{t} \mathrm{d}s \left[\frac{\partial L}{\partial q^\alpha} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial q^\alpha} \right]}_{=0} + \left. \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} \right|_{t_1}^{t} = p_\alpha.\end{aligned}$$

Betrachte nun q^α als fixiert und differenziere nach t,

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{t_1}^{t} \mathrm{d}t\, L = L = \frac{\partial S}{\partial t} + \sum_\alpha \frac{\partial S}{\partial q^\alpha} \frac{\partial q^\alpha}{\partial \dot{q}^\alpha} \\ \Rightarrow \frac{\partial S}{\partial t} &= \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} - \sum_\alpha p_\alpha \dot{q}^\alpha = -H.\end{aligned}$$

Die Wirkungsfunktion $S(q^\alpha, t)$ erfüllt die folgenden Differentialgleichungen,

$$\begin{aligned}&\frac{\partial S}{\partial t} = -H, \quad \frac{\partial S}{\partial q^\alpha} = p_\alpha \\ &\mathrm{d}S = \sum_\alpha p_\alpha\, \mathrm{d}q^\alpha - H\, \mathrm{d}t\end{aligned}$$

Damit folgt die Hamilton-Jacobi Differentialgleichung,

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -H(q^\alpha, p_\alpha, t) = -H(q^\alpha, \frac{\partial S}{\partial q^\alpha}, t).$$

$S(q^\alpha, t)$ ist somit durch eine partielle Differentialgleichung 1. Ordnung in $f + 1$ Variablen bestimmt. Für partielle Differentialgleichungen existieren weitreichende Lösungsverfahren und -sätze, mit denen man sich in der Quantenelektrodynamik ausführlich beschäftigt.

Die Lösung ist durch $f+1$ Integrationskonstanten bestimmt. Eine Integrationkonstante ist trivial,

$$S(q^\alpha, t, a^\alpha), \quad \alpha = 1, \ldots, f.$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung können wir als Erzeugende einer kanonische Transformation mit $p_\alpha = a^\alpha$ auffassen,

$$\begin{aligned}
&F_2(q^\alpha, p_\alpha) = S(q^\alpha, t, a^\alpha).\\
&p_\alpha = \frac{\partial S}{\partial q^\alpha}\\
&Q^\alpha = \frac{\partial S}{\partial p_\alpha}\\
&H' = H + \frac{\partial S}{\partial t} = 0.
\end{aligned}$$

Bsp Wir betrachten erneut den harmonischen Oszillator,

$$H = \frac{p^2}{2m} + m\omega^2 q^2,$$

und lösen die Hamilton-Jacobi Differentialgleichungen.

Separation führt auf,

$$S(q^\alpha, t) = S_0(q^\alpha) + S_1(t).$$

Für den zeitabhängigen Teil ist

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial S_1}{\partial t} = -\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S_0(q)}{\partial q}\right)^2 - m\omega^2 q^2\\
\Rightarrow &\frac{\partial S_1}{\partial t} = -a^1 \Rightarrow \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S_0(q)}{\partial q}\right)^2 + m\omega^2 q^2 = a^1
\end{aligned}$$

Für den Ortsanteil erhalten wir so,

$$\frac{\partial S_0}{\partial q} = \sqrt{2m}\sqrt{a^1 - m\omega^2 q^2}$$

dies kann man integrieren,

$$S_0(q) = \int \mathrm{d}q \sqrt{2m}\sqrt{a^1 - m\omega^2 q^2}.$$

Die Lösung hat daher die Form,

$$S(q,t) = \int \mathrm{d}q\sqrt{2m}\sqrt{a^1 - m\omega^2 q^2} + a^1 t.$$

Man kann hiervon eine analytische Lösung berechnen. Betrachten wir die neuen Koordinaten,

$$P_\alpha = a^1, \quad Q^\alpha = \frac{\partial S}{\partial a^1} = \int \mathrm{d}q\sqrt{\frac{m}{2}}\frac{1}{\sqrt{a^1 - m\omega^2 q^2}} - t$$
$$\Rightarrow Q^\alpha + t = \frac{1}{\omega}\arcsin\left(q\sqrt{\frac{m\omega^2}{2a^1}}\right).$$

In den neuen Koordinaten (Q^α, P_α) verschwindet die Hamiltonfunktion $H' = 0$, d.h. $P = \text{const}$, $Q = \text{const}$ und daher

$$q = \sqrt{\frac{2P}{m\omega^2}}\sin\left(\omega(t+Q)\right)$$
$$p = \ldots$$

D.h. in den neuen Koordinaten ist der Impuls P die Amplitude und Q die Phase des Oszillators, beide Konstanten. ■