Prof. Dr. Hans Peter Büchler
Institute for Theoretical Physics III, University of Stuttgart

February 10th, 2021
WS 2020/21

Problem 1: Rabi-Oszillationen

Betrachte ein Spin$-1/2$ Teilchen mit dem Hamiltonian

$$H = \frac{\hbar\Omega}{2}\Big(\left|\uparrow\right\rangle\left\langle\downarrow\right| + \left|\downarrow\right\rangle\left\langle\uparrow\right|\Big) = \frac{\hbar\Omega}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

Zur Zeit $t = 0$ sei das System im Zustand $|\psi(0)\rangle = |\uparrow\rangle = (1, 0)^T$ präpariert.

a) Berechne die Zeitentwicklung des Systems mit dem Hamiltonian H.
b) Berechne die Erwartungswerte $\langle\sigma_z\rangle$ und $\langle\sigma_x\rangle$ und zeichne sie als Funktion der Zeit t.
c) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass sich der Spin zur Zeit $t_1 = 3/(2\Omega)$ im Zustand $|\uparrow\rangle$ oder im Zustand $|\downarrow\rangle$ befindet.
d) Eine Messung zur Zeit t_1 hat ergeben, dass der Spin im Zustand $|\uparrow\rangle$ ist. In welchem Zustand ist der Spin zur Zeit $t_2 = 7/(2\Omega)$?

Problem 2: Unendlicher Potentialtopf mit δ-Potential

Betrachte ein eindimensionales Teilchen im Potential

$$V(x) = \begin{cases} \infty\,, & x < -a \\ V_0\delta(x)\,, & -a < x < a \\ \infty\,, & x > a \end{cases} \tag{2}$$

a) Wie lautet der Hamiltonoperator des Systems? Welche Vertauschungsrelationen erfüllen x und p?
b) Formuliere die Randbedingungen für die Wellenfunktion an den Punkten $x = -a$, $x = a$, und $x = 0$.
c) Zeige, dass die asymmetrischen Wellenfunktionen $\psi(x) = \sin\left(\frac{\pi x n}{a}\right)$, $n \in \mathbb{N}$, Eigenzustände des Hamiltonians sind. Welches sind die dazugehörigen Eigenenergien?
d) Bestimme die symmetrischen Lösungen und bestimme die Grundzustandsenergie.

Problem 3: Harmonischer Oszillator

Betrachte den eindimensionalen harmonischen Oszillator

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}x^2\,. \tag{3}$$

a) Drücke den Aufsteigeoperator $a^\dagger$ und den Absteigeoperator a mit Hilfe des Ortsoperators x und des Impulsoperators p aus. Wie sieht der Hamiltonian in den neuen Operatoren aus?

b) Berechne folgende Vertauschungsrelationen

$$[a, a^\dagger] \qquad [x, a^\dagger] \qquad [(a)^n, a^\dagger] \qquad [H, x] \qquad [H, p] \tag{4}$$

wobei $n \in \mathbb{N}$.

c) Gehe jetzt ins Heisenberg-Bild über. Wie sehen die Operatoren

$$a_\mathrm{H}(t) \qquad a_\mathrm{H}^\dagger(t) \qquad x_\mathrm{H}(t) \qquad p_\mathrm{H}(t) \tag{5}$$

im Heisenberg-Bild aus.

d) Wie sieht die Grundzustandswellenfunktion $\psi_0(x)$ aus. Berechne die Wellenfunktion $\psi_1(x)$ des ersten angeregten Zustandes durch Anwenden des Aufsteigeoperators.

Problem 4: Störungstheorie im Wasserstoffatom

Ein Wasserstoffatom wird entlang der z-Achse durch ein harmonisches Potential

$$V_\mathrm{ext}(\mathbf{r}) = kz^2 \tag{6}$$

gestört.

a) Berechne die Energiekorrektur des Grundzustandes in 1. Ordnung Störungstheorie.

b) Betrachte jetzt den angeregten Zustand mit der Hauptquantenzahl $n = 2$. Wie groß ist die Energieentartung? Welche Quantenzahlen charakterisieren die Zustände?

c) Die Störung führt zu einer Aufspaltung dieser Energieentartung. Treffe aufgrund von Symmetrieüberlegungen eine Aussage über die Aufspaltung der Entartung. Welches sind die guten Quantenzahlen? (Begründung) Welcher Zustand wird durch die Störung zum Zustand mit der tiefsten Energie und welcher zum Zustand mit der höchsten Energie?

d) Überprüfe die Aussagen aus der vorherigen Aufgabe durch explizites Ausrechnen.

Problem 5: Drehimpulsaddition

Betrachte ein Teilchen mit Bahndrehimpuls $l = 2$ (d-Welle) und einem internen Spin $s = 3/2$.

a) Wie groß ist die Dimension des Hilbertraumes? Stelle eine natürliche Basis auf, die die Zustände berschreibt.

b) Welches sind die erlaubten Werte j des Gesamtdrehimpulses $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$?

c) Was ist die Parität der Zustände?

d) Der Hamiltonian des Systems ist nur durch die Spin-Bahn Kopplung $H = \gamma \mathbf{L} \cdot \mathbf{S}$ gegeben. Berechne die Eigenenergien des Systems und gebe die Entartung an.